

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...



ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

https://t.me/riazisara



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

https://www.instagram.com/riazisara.ir

هماهنگی کلاس خصوصی آنلاین ریاضی ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲


آکادمی
ریاضی
مهندس روحانی
ریاضی ۳
مشتق
آموزش
مفهومی
بدون خط به خط کتاب درسی
حل آزمون‌های نهایی
مولف و مدرس: مهندس روحانی



به جای مقدمه

این مجموعه شامل درسنامه‌ای کامل به همراه ۱۰۰۰ سؤال متنوع و حل شده از سؤالات کتاب درسی و امتحانات نهایی داخل و خارج از کشور به همراه سؤالات مفهومی و تألیفی از متن کتاب درسیه . تمام نکات لازم برای شما ارائه شده . این کتاب با توجه به رویکرد کتاب ریاضی ۳ تدوین شده و سعی کردم کاستی های اونو پوشش بدم . از طرفی نحوه ی نوشتن پاسخ تشریحی ، برای امتحان نهایی هم ارائه شده تا به" اندازه بنویسی و نمره سوال رو کامل بگیری" . سازو کارتدوین کتاب بطوریه که با استفاده از مفاهیم و سؤالات حل شده قادر به حل سؤالات بعدی باشی . ۸ آزمون شبیه سازی شده امتحان نهایی همراه با پاسخنامه کاملاً تشریحی و "توضیح دار " آوردم تا شما سوالات امتحان نهایی رو قبل از برگزاری دیدار کنید .

برای موفقیت در درس ریاضی باید از حل مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی شروع کنید و به هیچ‌وجه از آن غافل نشوید سؤالات امتحانات نهایی و حتی کنکور به طور مستقیم از تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی طراحی می‌شن. آفت موفقیت شما حفظ کردن پاسخ تمریناته! تسلط بر مفاهیم مستلزم فهم درست درسه و اکتفا کردن به خواندن حل مسأله کارساز نیست، دقت کنید که حل هر سؤال برای شما کمکیه برای حل سؤالات جدیدتر و درک مفاهیم اساسی ریاضی از طریق حل مسئله .

دقت به موارد زیر موفقیت شما را افزایش میده :

۱- بررسی موضوعات به صورت تشریحی و مفهومی و هم‌چنین توجه به کاربرد مفاهیم و تعاریف در حل مسئله .

۲- یادگیری عمیق موضوعات با حوصله‌ی زیاد و اینکه روش های مختلف حل یه سوال رو یادبگیری.

۳- بررسی نمونه سوالات حل شده و پس از آن حل تمرین (البته به اعتقاد من مثال های حل شده کتاب رو هم باید اول سعی کنیم خودمون حل کنیم) و در صورت نیافتن راه حل رجوع به پاسخ.

خوبه بدونید ارزش ۵۰ تمرین که خودتون حل می کنید به مراتب بیش‌تر از خوندن و حفظ کردن ۱۰۰۰ تمرین حل شده است، چون مهم‌ترین قسمت یادگیری و کاربردی‌ترین آن برای حل مسأله ریاضی مثال‌ها و تمرین‌هایی است که خودتون به حل آن می‌پردازید.

فرآیند یادگیری ریاضی تدریجیه و در صورت عدم تکرار و تداوم از یاد می‌ره ،بنابراین انتظار نداشته باشید در این درس در کوتاه مدت تسلط کامل پیدا کنید بلکه این مهم آهسته و پیوسته با تمرین مطالب آموخته شده اتفاق می افته . تسلط ومهارت در هر درسی نتیجه تلاش مستمر و پیگیریه .

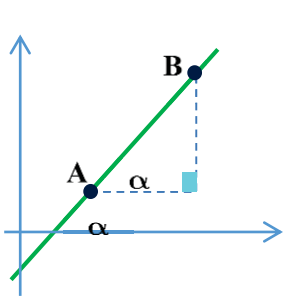
لطف کنید کمی و کاستی این کتاب را از من دریغ نکنید تا مجموعه بهتری ارائه بشه از صبر و حوصله و دقت شما سپاس بی پایان دارم از ودقت نظر تشکر می کنم .

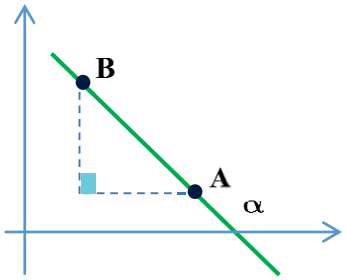
سپاس و عشق ، نثار همسر و فرزندانم که برای تالیف این مختصر وقت بسیاری را از ایشان دریغ داشتم .

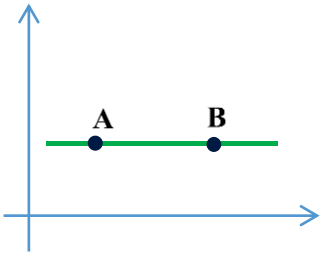
کرج اسفند ۱۴۰۳: محمد صادق روحانی گَلمِجانی

فصل ۴ مشتق

می دانیم شیب یک خط ، با داشتن مختصات دو نقطه غیر هم طول واقع بر خط به راحتی از رابطه زیر حاصل می شود .

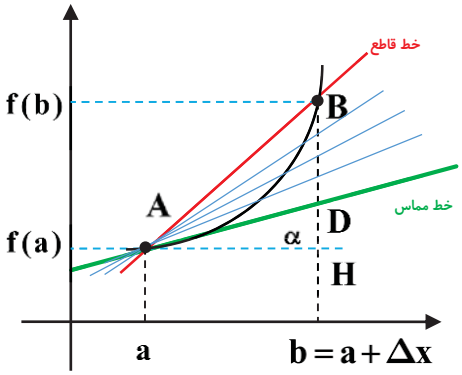






$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\tan\alpha$$

فرض کنید دو نقطه A , B روی نمودار تابع f باشند خطی که این دو نقطه را به هم وصل می کند اصطلاحاً خط قاطع گفته می شود و شیب آن :



$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=$$ شیب خط قاطع

حالا تصور کن نقطه B یواش یواش به نقطه A نزدیک بشه عملاً وقتی B به اندازه کافی به A نزدیک بشه خط قاطع تبدیل به خط مماس در نقطه A خواهد شد . و شیب این خط هم قابل تعیین است .

$$\text{if}\quad B\to A\quad\Rightarrow\quad m_{AB}\to\quad m_A=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\tan\alpha$$ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ی A

اگر $f(x)$ یک تابع باشد شیب خط مماس بر تابع f در نقطه $A(a\ ,\ f(a))$ به صورت زیر تعریف می شود .

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=$$ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ی A

به شرط اینکه این حد موجود باشد .

این حد را به این شکل هم می توان نوشت :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=$$ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ی A

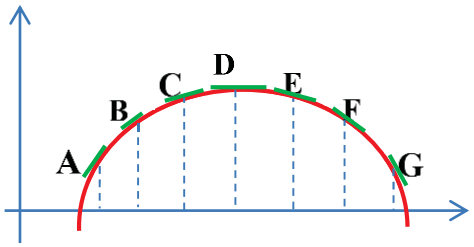
۱) شیب خط مماس بر تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در نقطه $x=1$ را تعیین کنید .

☑ پاسخ: چشم

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$$

مماس بازی

اگر نمودار تابع f در همسایگی نقطه ای صعودی باشد ، خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه نیز صعودی خواهد بود در نتیجه شیب خط مماس یعنی مشتق هم مثبت می باشد . و برعکس



$m_G < m_F < m_E < m_D = 0 < m_C < m_B < m_A$

اگر نمودار تابع f در همسایگی نقطه ای نزولی باشد ، خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه نیز نزولی خواهد بود در نتیجه شیب خط مماس یعنی مشتق در آن نقطه هم منفی می شود .



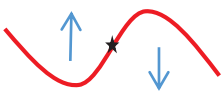
از طرفی هر جا تابع ماکزیمم یا مینیمم کلاسیک بشه مشتق تابع صفره چون خط مماسش افقیه و شیبش صفره



هر جا تقعر یا گودی تابع رو به بالا باشد از چپ به راست مقدار مشتق افزایشی است .



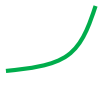
هر جا تقعر یا گودی تابع رو به پایین باشد از چپ به راست مقدار مشتق کاهشی است .



در این شکل از چپ به راست ابتدا گودی تابع رو به بالاست یعنی در این بازه مشتق روندی صعودی یا افزایشی دارد از نقطه ستاره دار به بعد که گودی تابع رو به پایین می شود مشتق تابع کاهشی یا نزولی می شود

۲) در جدول مقابل بعضی از مقادیر تابع f آمده است نمودار تابع f در بازه $[۲,۶]$ کدام می تواند باشد ؟

x	۲	۳	۴	۵	۶
f(x)	۱۲	۲۰	۲۶	۳۰	۳۲

۱)


۲)

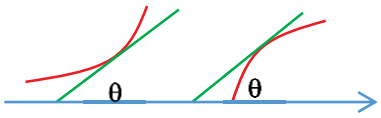

۳)


۴)


☑ پاسخ :

مطابق جدول تابع روندی صعودی دارد . یعنی گزینه های ۱ یا ۴ درست است . از طرفی : $\frac{۳۲-۳۰}{۶-۵} > \frac{۳۰-۲۶}{۵-۴} > \frac{۲۶-۲۰}{۴-۳} > \frac{۲۰-۱۲}{۳-۲}$ و این یعنی شیب های خط مماس بر منحنی از چپ به راست کمتر می شود بنابراین گزینه ۴ درست است چون گودی این تابع رو به پایین است .

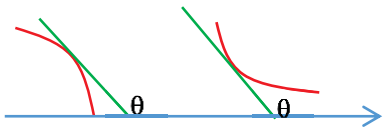
تابع صعودی و مشتق تابع، و شیب خط مماس در $x=a$ مثبتند. $\tan\theta = m = f'(a) > 0$



تابع مشتق پذیر و مماس پذیر است. معادله خط مماس بر تابع در نقطه $x=a$:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad \Rightarrow \quad y = mx + n$$

تابع نزولی و مشتق تابع، و شیب خط مماس در $x=a$ منفی اند. $\tan\theta = m = f'(a) < 0$



تابع مشتق پذیر و مماس پذیر است. معادله خط مماس بر تابع در نقطه $x=a$:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad \Rightarrow \quad y = mx + n$$

تابع ماکزیمم یا مینیمم دارد و مشتق تابع و شیب خط مماس در $x=a$ صفراند. $\tan\theta = m = f'(a) = 0$



تابع مشتق پذیر و مماس پذیر است. معادله خط مماس بر تابع در نقطه $x=a$:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \xrightarrow{f'(a)=0} y = f(a)$$

۳) اگر $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-4}{x+1} = -3$ باشد شیب خط مماس در نقطه ..... برابر ..... است

☑ پاسخ:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to -1}\frac{f(x)-4}{x+1} = -3 \quad \Rightarrow \quad a=-1 \ , \ f(-1)=4 \quad \Rightarrow \quad A(-1,4) \ , \ f'(-1)=-3$$

۴) شیب خطی که نقاط A , B با طول های ۱ و $x+1$ روی تابع مشتق پذیر $f(x)$ را به هم وصل می کند برابر است با : $\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{2})}{3x+2}$

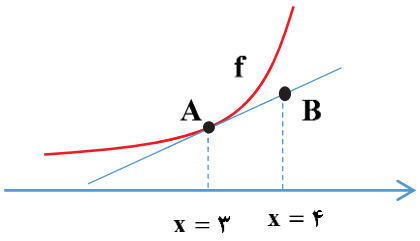
شیب خط مماس بر این تابع در $x=1$ را تعیین کنید .

☑ پاسخ:

$$\text{شیب خط } AB = \frac{f(x+1)-f(1)}{(x+1)-1} = \frac{f(x+1)-f(1)}{x} = \frac{\sin(x-\frac{\pi}{2})}{3x+2} = \frac{-\cos x}{3x+2}$$

$$\text{شیب خط مماس} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{(x+1)-1} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{3x+2} = \frac{-1}{0+2} = \frac{-1}{2}$$

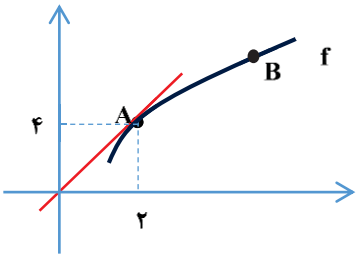
۵) در نمودار زیر خط مماس بر نمودار f در نقطه ای به طول $x=۳$ رسم شده است . اگر $f(۳)=۷$, $f'(۳)=۶$ مختصات نقطه B را مشخص کنید .



☑ پاسخ: اول معادله خط مماس بر منحنی در نقطه A را به دست می آوریم .

$$y-۷=۶(x-۳) \Rightarrow y=۶x-۱۱ \Rightarrow y_B=۶(۴)-۱۱=۱۳$$

۶) نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است . اگر خط d در نقطه A بر نمودار تابع f مماس باشد . (دی ۱۴۰۱)



الف) حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ را بیابید .

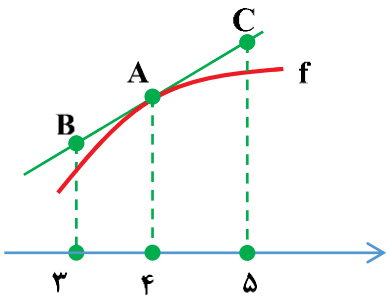
ب) شیب خط های مماس در نقاط A , B را مقایسه کنید .

☑ پاسخ:

الف)
$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)=\tan\alpha=\frac{۴}{۲}=۲$$

ب)
$$m_A > m_B$$

۷) برای تابع f در شکل مقابل داریم $f'(۴)=۱/۵$, $f(۴)=۲۴$ با توجه به شکل مختصات نقاط B , C را بیابید (خرداد ۱۴۰۰)



☑ پاسخ:

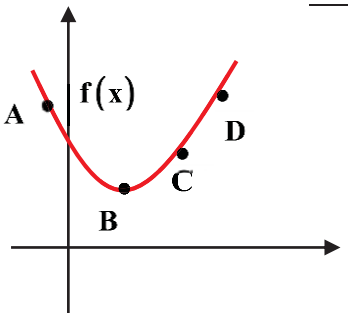
معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $x=a$: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $x=۴$: $y-۲۴=۱/۵(x-۴)$

$$y_B=۱/۵(۳-۴)+۲۴=۲۲/۵$$

$$y_C=۱/۵(۵-۴)+۲۴=۲۵/۵$$

۸) نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است . اگر m شیب خط مماس در هر نقطه باشد کدام گزینه درست نیست ؟



۱) $m_A<۰$

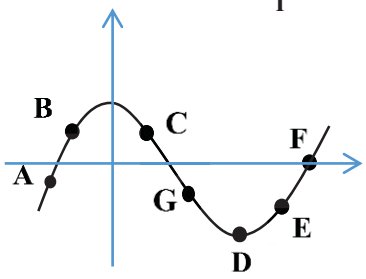
۲) $m_D>m_B$

۳) $m_C<m_A$

۴) $m_B=۰$

☑ پاسخ: گزینه ۳ : چون مشتق در نقطه C مثبت ولی درنقطه A منفی است پس : $m_A<m_C$

۹) شکل مقابل مربوط به نمودار تابع f است در چند نقطه مشخص شده روی نمودار تابع رابطه $\frac{f}{f'} > 0$ برقرار است ؟



۱ (۱ ۲ (۲

۳ (۳ ۴ (۴

☑ پاسخ:

$\frac{f}{f'} > 0$ این یعنی نقاطی که مقدار تابع و مشتق تابع هم علامت باشند . یعنی هر هم زمان مثبت و یا هم زمان منفی باشند .

در نقطه A مقدار تابع منفیه ولی مشتق تابع مثبته

در نقطه B مقدار و مشتق تابع هر دو مثبتند

در نقطه C مقدار تابع مثبته و مشتق منفیه

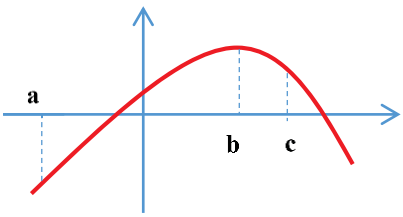
در D مقدار تابع منفی و مشتق تابع صفره

در نقطه E مقدار تابع منفی ولی مشتقش مثبته

در نقطه F مقدار تابع صفر و مشتق تابع مثبته

در نقطه G هم مقدار تابع منفیه و هم چون نزولی مشتق منفیه پس نقاط B, G در شرایط مسئله صدق می کنند .

۱۰) با توجه به نمودار تابع f کدامیک از گزینه ها درست است (خرداد ۱۴۰۱)



الف) $m_c > m_b > m_a$

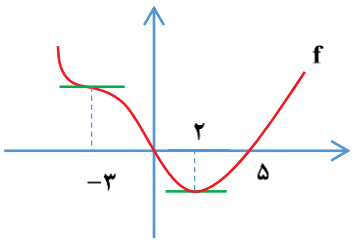
ب) $m_b > m_a > m_c$

پ) $m_a > m_b > m_c$

ت) $m_a > m_c > m_b$

☑ پاسخ: گزینه پ درست است

۱۱) اگر نمودار تابع $f(x)$ شکل رو به رو باشد در کدام بازه $f'(x) \leq 0$ است ؟

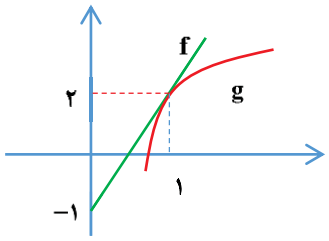


☑ پاسخ :

تابع هر جا که روندی نزولی دارد مشتق آن منفی است

پس بازه $(-\infty , ۲]$ جواب مسئله خواهد بود .

۱۲) در شکل مقابل حاصل $f'(۱) + g'(۱)$ را تعیین کنید .

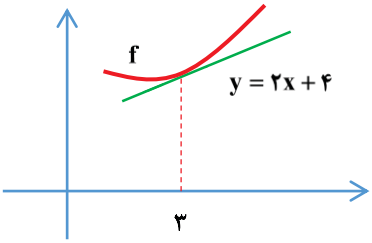


☑ پاسخ:

معادله خط مماس در نقطه $x = ۱$ بر منحنی g یعنی تابع f : $f(x) = ۳x - ۱ \quad \Rightarrow \quad y - ۲ = \frac{۲-(-۱)}{۱-۰}(x-۱) = ۳x - ۳$

این خط در نقطه $x = ۱$ هم با g هم عرض است و هم ، هم شیب است یعنی : $f(۱) = ۲ = g(۱)$, $f'(۱) = ۳ = g'(۱)$ در نتیجه $f'(۱) + g'(۱) = ۳ + ۳ = ۶$

۱۳) با توجه به شکل مقابل کدام گزینه صحیح است ؟



۱) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-۶}{x-۳}=۱۰$

۲) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-۱۰}{x-۳}=۴$

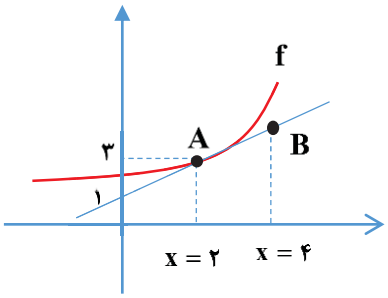
۳) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-۱۰}{x-۳}=۲$

۴) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-۳}{x-۳}=۲$

☑ پاسخ : مطابق شکل خط در $x=۳$ بر منحنی مماس است یعنی :

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-(۲(۳)+۴)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-۱۰}{x-۳}=۲$$

۱۴) در شکل مقابل نمودار $f(x)$ و خط مماس بر منحنی آن در نقطه $x=۲$ داده شده است . مشتق تابع $f(x)$ را در نقطه $x=۲$ بیابید .



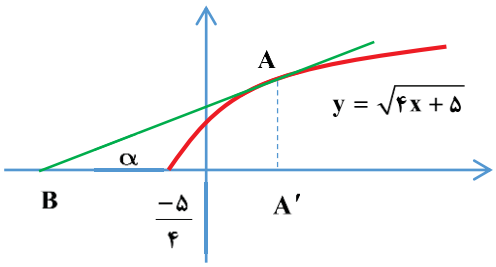
☑ پاسخ :

شیب خط مماس در $x=۲$ میشه مشتق تابع در همین نقطه

خط مماس از دو نقطه $(۰,۱)$, $A(۲,۳)$ می گذرد بنابراین شیبش میشه :

$$m_{LAB}=\frac{۳-۲}{۲-۰}=\frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad f'(۲)=\frac{۱}{۲}$$

۱۵) در نقطه A به طول $x=۱$ روی منحنی $y=\sqrt{۴x+۵}$ خطی بر منحنی مماس شده است ، امتداد این خط محور x ها را در B قطع کرده است.
اگر A' تصویر نقطه A باشد ، اندازه BA' کدام است ؟



☑ پاسخ :

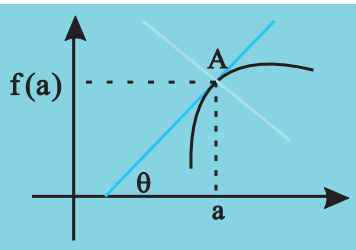
$$\tan\alpha=m_L=\frac{۴}{۲\sqrt{۴x+۵}}\Big|_{x=۱}=\frac{۲}{۳}$$

$$\tan\alpha=\frac{۲}{۳}=\frac{AA'}{BA'}=\frac{۳}{BA'} \quad \Rightarrow \quad BA'=\frac{۹}{۲}$$

معادله‌ی خط مماس و قائم در نقطه‌ای روی منحنی:

الان دیگه می‌دانیم اگر خط L در نقطه‌ای به طول a بر منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ مماس باشد،

شیب خط مماس از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:



$$m=\tan\theta=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$ شیب خط مماس در نقطه‌ی A

حالا اگه معادله خط مماس و قائم بر تابع رو خواست به شکل زیر عمل کن



۱) اول مختصات نقطه‌ای که می‌خواهیم مماس یا قائم در آن رابنویسیم معلوم کنید. $A\begin{vmatrix}a\\f(a)\end{vmatrix}$

۲) از تابع $f(x)$ مشتق بگیرید و $f'(a)$ را تعیین کنید این همان شیب خط مماس است. $m=f'(a)$ و

$m'=\frac{-1}{f'(a)}$ شیب خط قائم است. (بعضی وقتا این مشتق رو از راه تعریف می‌خوان)

۳) معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی خط قائم به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$L:\quad y-f(a)=f'(a)(x-a)$ خط مماس

$L':\quad y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)$ خط قائم

۱۶) معادله خط مماس بر منحنی تابع با ضابطه $f(x)=x^3-2x^2+3x+5$ در نقطه ای به طول $x=-1$ را بنویسید .

☑پاسخ:

$f(x)=x^3-2x^2+3x+5 \Rightarrow f'(x)=3x^2-4x+3$

$f(-1)=-1 \qquad f'(-1)=10$

$y-f(-1)=f'(-1)(x+1) \Rightarrow y+1=10(x+1) \Rightarrow y=10x+9$

۱۷) اگر منحنی $y=x^3+ax^2+bx+6$ بر خط $y=2x+1$ در $x=-1$ مماس باشد ، b کدام است ؟

۱) ۱۳ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۶

☑پاسخ:

$$\left(x^3+ax^2+bx+6\right)_{x=-1}=(2x+1)_{x=-1} \Rightarrow a-b=-6$$

$$\left(x^3+ax^2+bx+6\right)'_{x=-1}=(2x+1)'_{x=-1} \Rightarrow \left(2x^2+2ax+b\right)_{x=-1}=2 \Rightarrow -2a+b=-1$$

$$a=7 \quad , \quad b=13$$

۱۸) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $y = x^۲ - ۱$ را در نقطه‌ای به طول ۱ محاسبه نماید. سپس به کمک آن معادله‌ی خط مماس بر منحنی این تابع را در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی تابع بنویسید.

☑پاسخ:

$$f'(۱) = \lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱-(۱-۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}(x+۱) = ۲$$

مشتق همون شیب خط مماسه

$$A\begin{vmatrix} ۱ \\ (۱)^۲ - ۱ = ۰ \end{vmatrix} \Rightarrow \quad L: \quad y - ۰ = ۲(x-۱)$$

۱۹) معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{x}{x-۲}$ را در نقطه‌ی $A(۳,۳)$ به دست آورید. (نهایی)

☑پاسخ:

$$y' = \frac{-۲}{(x-۲)^۲} \quad \Rightarrow \quad m = y'_{(۳)} = -۲ \quad \Rightarrow \quad y - ۳ = -۲(x-۳)$$

۲۰) با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = x^۳$ را در نقطه a حساب کنید. سپس معادله خط قائم بر نمودار تابع را در نقطه $A(۱,۱)$ به دست آورید.

☑پاسخ:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^۳-a^۳}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^۲+ax+a^۲)}{x-a} = ۳a^۲$$

$$f(x) = x^۳ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ \Rightarrow f'(۱) = ۳(۱)^۲ = ۳ = m \Rightarrow m' = \frac{-۱}{۳} \Rightarrow L: y - ۱ = \frac{-۱}{۳}(x-۱)$$

خط قائم

۲۱) معادله‌ی خط مماس بر تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x-۱}$ در نقطه‌ی $x = ۱$ را بنویسید.

☑پاسخ:

$$f(x) = \sqrt[۳]{x-۱} \quad \Rightarrow \quad f'(۱) = \lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}-۰}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

بنابراین خط مماس بر تابع در $x = ۱$ خطی موازی محور y هاست و معادله‌ی آن همان طول نقطه است. $\quad L: \quad x = ۱$

۲۲) منحنی تابع $y = x^۲ + x - ۱$ محور عر ض ها را در نقطه A قطع می کند . معادله خط قائم بر منحنی تابع را در نقطه A بنو یسید .

☑پاسخ:

$$A\begin{vmatrix} x = ۰ \\ y = -۱ \end{vmatrix} \Rightarrow \quad f'(x) = ۲x + ۱ \quad \Rightarrow \quad f'(۰) = ۱ = m \quad \Rightarrow \quad m' = \frac{-۱}{m} = -۱$$

$$L: \quad y - (-۱) = -۱(x - ۰) \quad \Rightarrow \quad y = -x - ۱$$

۲۳) نقاطی از نمودار تابع $y = x^۳ - ۲x - ۱$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی دراین نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم با شد

☑پاسخ:

یعنی نقاطی را باید بیا بیم که مشتق تابع در این نقاط ۱ شود زیرا شیب نیمساز ربع اول و سوم ۱ ا ست . بنابراین داریم :

$$y = x^۳ - ۲x - ۱ \Rightarrow y' = ۳x^۲ - ۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

۲۴) نقاطی از منحنی تابع $f(x) = x^۳ - ۳x$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی در آن نقاط موازی خط $y - ۳x - ۱ = ۰$ باشد.

☑پاسخ:

$$y = ۳x + ۱ \quad \Rightarrow \quad m = ۳ \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۳ \quad \Rightarrow \quad ۳x^۲ = ۶ \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{۲}$$

۲۵) معادله خط مماس بر تابع با ضابطه $f(x)=\frac{۴x+۶}{x-۱}$ در نقطه تلاقی منحنی با نیمساز ناحیه اول را تعیین کنید .

☑پاسخ:

$$f(x)=\frac{۴x+۶}{x-۱}=x \quad \Rightarrow \quad x^۲-x=۴x+۶ \quad \Rightarrow \quad x^۲-۵x-۶=۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-۱ \\ x=۶ \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{۴x+۶}{x-۱} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{۴(x-۱)-۱(۴x+۶)}{(x-۱)^۲}=\frac{-۱۰}{(x-۱)^۲} \quad \Rightarrow \quad f'(۶)=\frac{-۱۰}{۲۵}=\frac{-۲}{۵}$$

$$y-۶=\frac{-۲}{۵}(x-۶)$$

۲۶) عرض از مبدا خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۲x-۳}}{x}$ در نقطه به طول $x=۲$ را تعیین کنید .

☑پاسخ:

$$f(x)=\frac{\sqrt{۲x-۳}}{x} \Rightarrow f(۲)=\frac{\sqrt{۲(۲)-۳}}{۲}=\frac{۱}{۲} \quad , \quad f'(x)=\frac{\frac{۲}{۲\sqrt{۲x-۳}}\times x-(۱)\sqrt{۲x-۳}}{x^۲} \quad \Rightarrow \quad f'(۲)=\frac{۱}{۴}$$

$$f(۲)=\frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad y-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}(x-۲) \quad \xrightarrow{x=۰} \quad y=۰$$

۲۷) اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{h}{f(۱)-f(x+h)}=۳$ و معادله خط قائم بر منحنی f در نقطه $x=۱$ به صورت $ky+۲x=۴$ باشد مقدار k را بدست آورید.

☑ پاسخ :

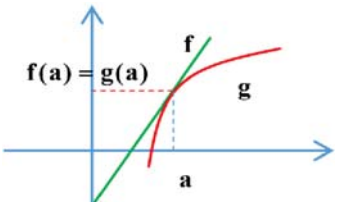
$$\lim_{h\to ۰}\frac{h}{f(۱)-f(x+h)}=\frac{-h}{f(x+h)-f(۱)}=-\frac{۱}{f'(۱)}=۳ \quad \Rightarrow \quad m'=۳$$ شیب خط قائم بر منحنی در نقطه $x=۱$:

$$ky+۲x=۴ \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-۲}{k}x+\frac{۴}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{-۲}{k}=۳ \quad \Rightarrow \quad k=\frac{-۲}{۳}$$

نکته

۱) اگر یک خط و یک منحنی و یا (دو منحنی) در $x=a$ بر هم مماس باشند آن گاه :

$$\begin{cases} f(a)=g(a) & \text{هم عرضی دو تابع} \\ f'(a)=g'(a) & \text{هم شیبی دو تابع} \end{cases}$$



۲۸) اگر خط $2x+y=4$ در نقطه ای به طول $x=1$ بر منحنی تابع $y=f(x)$ مماس باشد حاصل $\frac{f(1)}{f'(1)}$ کدام است ؟

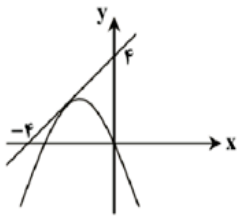
۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

☑پاسخ: خط مماس بر منحنی در نقطه تماس با منحنی هم عرض و هم شیب است .

$$2x+y=4 \Rightarrow y=-2x+4 \Rightarrow m=-2=f'(1)\ ,\ f(1)=-2(1)+4=2 \Rightarrow \frac{f(1)}{f'(1)}=\frac{-2}{2}=-1$$

۲۹) در شکل مقابل ،خط رسم شده بر نمودار $y=ax-x^2$ مماس است .مقدار a کدام است ؟

۱) $-\frac{15}{4}$ ۲) $-\frac{7}{2}$ ۳) $-\frac{13}{4}$ ۴) -3



☑پاسخ:

$$L: y-0=\frac{4-0}{0+4}(x+4) \Rightarrow y=x+4$$

$$y=ax-x^2=y=x+4 \Rightarrow x^2+(1-a)x+4=0 \xrightarrow{\Delta=0} (1-a)^2-16=0 \Rightarrow |a-1|=4 \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ a=5 \end{cases}$$

۳۰) مقدار m را طوری تعیین کنید تا منحنی $y=\frac{x+m}{x-1}$ بر خط $y=2x+1$ مماس باشد .

☑ پاسخ:

دو تابع بر هم مماس اند پس باید معادله تلاقی این دو ریشه مضاعف داشته باشد .

$$\frac{x+m}{x-1}=2x+1 \Rightarrow x+m=2x^2-x-1 \Rightarrow 2x^2-2x-m-1=0$$

چون معادله درجه دوم است برا ی ریشه مضاعف باید $\Delta=0$ باشد .

$$4-4(2)(-m-1)=0 \Rightarrow 8m=-12 \Rightarrow m=\frac{-3}{2}$$

۳۱) خط مماس بر نمودار های دوتابع با ضابطه های $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$, $g(x)=ax^2+bx$ در نقطه $x=2$ مشترک اند مقدار b کدام است ؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷ (خارج کشور ۹۹)

☑پاسخ:

چون در نقطه $x=2$ دو منحنی بر هم مماس اند (مماس مشترک دارند) باید معادله قطع آنها ریشه مضاف داشته باشد ولی چون معادله تقلطع آنها درجه ۲ نیست از روش دلتا نمی توان استفاده کرد در نتیجه داریم :

$$f(2)=g(2) \quad , \quad f'(2)=g'(2)$$

$$f(2)=g(2) \Rightarrow 4=4a+2b \Rightarrow 2a+b=2$$

$$f'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2} \ , \ g'(x)=2ax+b \Rightarrow f'(2)=g'(2) \Rightarrow -3=4a+b$$

$$\begin{cases}2a+b=2\\4a+b=-3\end{cases} \Rightarrow 2a=-5 \Rightarrow a=\frac{-5}{2} \ , \ b=7$$

۳۲)خط $7y-x=5$ در ناحیه اول صفحه مختصات بر منحنی $y=\frac{ax-1}{3x+1}$ مماس است . مقدار a کدام است ؟ (کنکور تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

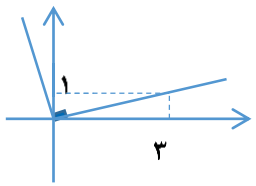
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{4}{7}$ ۴) $\frac{9}{7}$

☑پاسخ:

$$\frac{ax-1}{3x+1}=\frac{x+5}{7} \Rightarrow 3x^2+16x+5=7ax-7 \Rightarrow 3x^2+(16-7a)x+12=0$$

$$\begin{cases}\Delta=(16-7a)^2-144=0 \Rightarrow \begin{cases}16-7a=12 \Rightarrow a=\frac{4}{7}\\16-7a=-12 \Rightarrow a=4\end{cases} \Rightarrow a=4\\ x_S=\frac{7a-16}{6}>0 \Rightarrow a>\frac{16}{7}\end{cases}$$

۳۳) نمودار تابع $y=f(x)$ شکل مقابل است ، حاصل $f'(2)+f'(-1)+f'_-(0)$ کدام است ؟



☑پاسخ:

تابع شامل دو نیم خط است که در مبداء بر هم عمودند و داریم :

$$\begin{cases}x\geq 0 \Rightarrow m=\frac{1}{3}\\x<0 \Rightarrow m'=-3\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}\frac{1}{3}x & x\geq 0\\ -3x & x<0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & x>0\\ -3 & x<0\end{cases} \Rightarrow f'(2)+f'(-1)+f'_-(0)=\frac{1}{3}+(-3)+(-3)=\frac{-17}{3}$$

مشتق تابع در یک نقطه : فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد. اگر حد $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود باشد، یعنی عدد شود

اصطلاحاً می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر است و مقدار آن را با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهیم.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تعریف دیگری که با تعریف فوق هم ارز است به صورت زیر است:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تذکر: اگر این حد عدد یکتایی نشود و یا وجود نداشته باشد، تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق ناپذیر است.

برای محاسبه مشتق تابع در یک نقطه از یکی از روش‌های زیر استفاده می‌شود.

۱) $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ۲) $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

- در روش اول به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱. محاسبه $f(a)$ ۲. تعیین $f(x)-f(a)$ ۳. تشکیل و ساده کردن $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ۴. محاسبه حد $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ که دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است و روش‌های رفع ابهام آن را در حد دیدیم.

- در روش دوم به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱. محاسبه $f(a)$ ۲. تعیین $f(a+h)$ ۳. محاسبه $f(a+h)-f(a)$ ۴. محاسبه حد $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ که دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است.

۳۴) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x|x-2|$ را در نقطه $x=2$ مورد بررسی قرار دهید. (نهایی)

☑ پاسخ:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x|x-2|-0}{x-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x(x-2)}{x-2}=2=f'(2^+)\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-x(x-2)}{x-2}=-2=f'(2^-)\end{cases}$$

تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست. زیرا مشتق چپ و راست آن با هم برابر نیست.

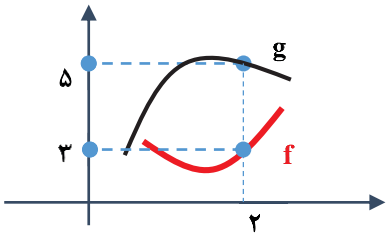
۳۵) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=x^2+1$ را در نقطه‌ی $x=a$ محاسبه کنید. (نهایی)

☑ پاسخ:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2+1-a^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2+1-a^2-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}2a+h=2a$$

۳۶) با توجه به شکل نشان دهید حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)g(x)-۳g(x)}{x-۲}$ چند برابر $f'(۲)$ است . (خرداد ۱۴۰۲)



☑پاسخ:

$$g(۲)=۵\ ,\ f(۲)=۳$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)g(x)-۳g(x)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۳}{x-۲}\times g(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\times g(x)=f'(۲)g(۲)=۵\times f'(۲)$$

۳۷) با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

☑پاسخ:

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{x}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱-x}{x}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱-x}{x(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{-۱}{x}=-۱$$

۳۸) مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ را در نقاط $x=۱$ بررسی کنید.

☑پاسخ:

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{|x^۲-۱|-۰}{x-۱}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۲=f'_+(۱)\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{-(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=-۲=f'_-(۱)\end{cases}$$

تابع در این نقطه مشتق‌ناپذیر است.

۳۹) مشتق تابع $f(x)=x^۳+۳x$ را در نقطه‌ی $x=۱$ با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

☑پاسخ:

راه اول)

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+۳x-۴}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^۲+x+۴)}{(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}x^۲+x+۴=۶$$

راه دوم)

$$f'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۱+h)^۳+۳(۱+h)-۴}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۱+۳h+۳h^۲+h^۳)+(۳+۳h)-۴}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h^۳+۳h^۲+۶h}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(h^۲+۳h+۶)}{h}=\lim_{h\to ۰}(h^۲+۳h+۶)=۶$$

۴۰) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{۴-x}$ را به دست آورید. (نهایی)

☑پاسخ:

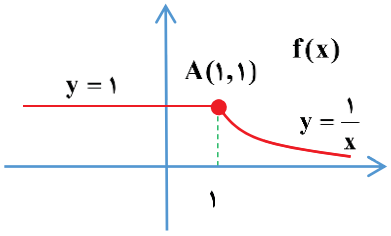
گویا کردن

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{۴-(x+h)}-\sqrt{۴-x}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{۴-(x+h)}-\sqrt{۴-x}}{h}\times\frac{\sqrt{۴-(x+h)}+\sqrt{۴-x}}{\sqrt{۴-(x+h)}+\sqrt{۴-x}}=$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۴-(x+h)-۴+x}{h\left(\sqrt{۴-(x+h)}+\sqrt{۴-x}\right)}=\lim_{h\to ۰}\frac{-h}{h\left(\sqrt{۴-(x+h)}+\sqrt{۴-x}\right)}=\frac{-۱}{۲\sqrt{۴-x}}$$

۴۱) با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطه A نشان دهید که تابع f در نقطه A مشتق پذیر نیست (خرداد ۱۴۰۰)

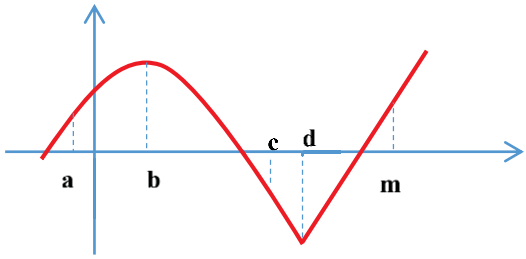
☑ پاسخ:



می دانیم : $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\dfrac{-(x-1)}{x(x-1)}=-1$ ، $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-1}{x-1}=0$

۴۲) با توجه به نمودار تابع $f(x)$ به سوالات زیر پاسخ دهید . (خرداد ۱۴۰۰)



الف) طول نقطه ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید .

ب) طول نقطه گوشه تابع را بنویسید .

پ) طول نقطه ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است .

☑پاسخ:

الف) $x=b$ ب) $x=d$ پ) $x=c$

هرجاماکسیمم یا مینیمم کلاسیک داشتیم (∩ ∪) مشتق تابع در اونجا صفره

در هر نقطه که تابع بشکنه و مشتق چپ وراست دو مقدار عددی متفاوت و یا یکی عددی و دیگری بینهایتی بشه نقطه گوشه یا زاویه دار داریم .

۴۳)درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) شرط لازم و کافی برای آن‌که تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن است که در این نقطه پیوسته باشد. نادرست

پیوستگی فقط شرط لازم مشتق پذیری است

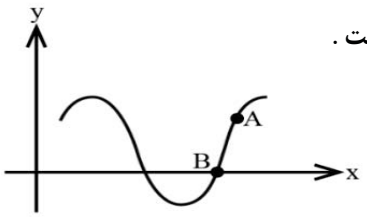
ب) هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است ولی هر تابع پیوسته‌ای مشتق پذیر نیست. درست

پ) شیب خط مماس بر منحنی در نقطه تماس برابر با مشتق تابع در نقطه تماس است . درست

ت) اگر خط $x=a$ مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه $(a\ ,\ f(a))$ باشد آن گاه $f'(a)$ موجود است . نادرست

وقتی خط مماس بر منحنی قائم است یعنی مشتق تابع در این نقطه بی نهایت است

ث) در شکل روبه‌رو، شیب خط مماس در نقطه‌ی A از شیب خط مماس در نقطه‌ی B بیش‌تر است .



نادرست چون وقتی گودی تابع به سمت پایین باشد از چپ به راست مشتق کاهش می یابد

۴۴)به ازای کدام مقدار a اختلاف شیب نیم خط های مماس چپ و راست بر منحنی $f(x)=|۴x-۳|\sqrt{ax}$ در نقطه $x=\frac{۳}{۴}$ برابر $۲\sqrt{۶}$ می شود؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$ (کنکور دی ۱۴۰۱)

☑پاسخ:

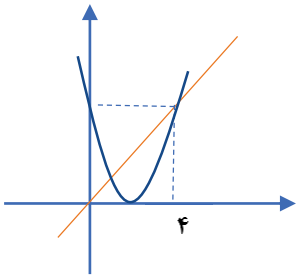
$$f(x)=|۴x-۳|\sqrt{ax} \Rightarrow f'_{+}(\frac{۳}{۴})=(۴)(\sqrt{\frac{۳}{۴}a}) \quad , \quad f'_{-}(\frac{۳}{۴})=(-۴)(\sqrt{\frac{۳}{۴}a})$$

الباقی فقط مقدار گزاری — مشتق عامل صفر — الباقی فقط مقدار گزاری — مشتق عامل صفر

$$f'_{+}(\frac{۳}{۴})-f'_{-}(\frac{۳}{۴})=۸(\sqrt{\frac{۳}{۴}a})=۴\sqrt{۳a}=۲\sqrt{۶} \Rightarrow ۱۶(۳a)=۴(۶) \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۴۵) در شکل مقابل نمودار سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ و خط $y=۲x$ رسم شده است ، اگر $g(x)=f^۲(x)-f(x^۲)$ باشد ،

مقدار $g'(۱)$ کدام است ؟



۱) ۲۴ ۲) -۲۴

۳) -۸ ۴) ۸

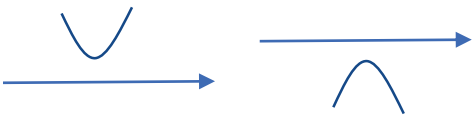
☑ پاسخ: : در بعضی از سوالات اول باید با توجه به مفروضات مسئله ضابطه تابع را بنویسیم ، سپس از تابع به دست آمده مشتق بگیریم .

در تعد زیادی از این سوالات تابع درجه دو است و باید از راه سریع آن را تعیین کنیم .

$y=a(x-x_۱)(x-x_۲)$



$y=a(x-x_s)^۲+y_s$



پاسخ گزینه : گزینه ۳

با توجه به اینکه $f(۰)=f(۴)=۸$ بنابراین طول راس سهمی $x=\frac{۰+۴}{۲}=۲$ است .در نتیجه داریم :

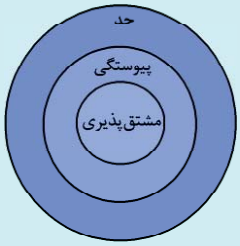
$$f(x)=ax^۲+bx+c=a(x-۲)^۲ \Rightarrow f(۰)=۴a=۸ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow f(x)=۲(x-۲)^۲$$

$$g(x)=۴(x-۲)^۴-۲(x^۲-۲)^۲ \Rightarrow g'(x)=۱۶(x-۲)^۳-۴(x^۲-۲)(۲x) \Rightarrow g'(۱)=-۱۶+۸=-۸$$

شرط لازم مشتق پذیری

مشتق راست: در تابع $y=f(x)$ اگر $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود باشد (عدد شود) این حد را مشتق راست تابع $f(x)$ در $x=a$ نامیده و با نماد $f'_+(a)$ نشان می‌دهند. یادت باشه این حد وقتی قابل محاسبه است که تابع f در $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

مشتق چپ: در تابع $y=f(x)$ اگر $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود باشد (عدد شود) این حد را مشتق چپ تابع $f(x)$ در $x=a$ نامیده و با نماد $f'_-(a)$ نشان می‌دهند. بازم یادت باشه این حد وقتی قابل محاسبه است که تابع f در $x=a$ پیوستگی چپ داشته باشد.



هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است ولی هر تابع پیوسته‌ای مشتق پذیر نیست.
عملاً پیوستگی شرط لازم مشتق پذیری است ولی کافی نیست.
یعنی توابعی وجود دارند که پیوسته‌اند ولی مشتق پذیر نیستند.

نکته

اگر تابعی در $x=a$ فقط پیوستگی راست داشته باشد در آن نقطه مشتق چپ ندارد و مشتق راست نیز باید بررسی شود و هم‌چنین اگر تابعی فقط پیوستگی چپ داشته باشد در آن نقطه مشتق راست ندارد و مشتق چپ آن باید بررسی شود.

روش حل مسئله

برای حل مسائل مربوط به مشتق پذیری در یک نقطه به روش زیر عمل کنید:

۱) پیوستگی تابع در $x=a$ را بررسی کنید. یعنی باید $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$ اگر یکی از پیوستگی‌ها برقرار نبود مشتق آن نیز وجود ندارد. (عدم وجود مشتق را بیان کنید. به‌خصوص در توابع قدرمطلقی، چند ضابطه‌ای و براکتی)

۲) مشتق چپ و راست را ازراه تعریف بررسی می‌کنیم. اگرداشته باشیم: $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ عدد شود می‌گوییم تابع در $x=a$ مشتق پذیر است.

۴۶) ثابت کنید اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد. آن‌گاه تابع f در $x=a$ پیوسته است.

☑پاسخ: کافی است نشان دهیم $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

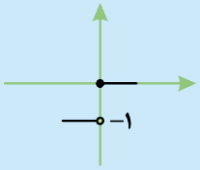
$$\lim_{x\to a}f(x)-f(a)=\lim_{x\to a}(x-a)\left(\frac{f(a)-f(a)}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}(x-a)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0\times f'(a)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

در حالات زیر می‌گوییم مشتق وجود ندارد:

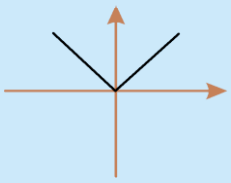
۱) تابع در $x=a$ پیوسته نباشد مانند: $f(x)=[x]$ که در نقطه‌ی $x=0$ پیوستگی چپ ندارد، بنابراین مشتق چپ نخواهد داشت. در نتیجه مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]-0}{x}=\frac{0}{0}\overset{\text{مطلق}}{=}\overset{\text{حدی}}{0}=0$$



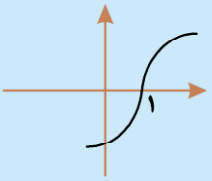
۲) مشتق چپ و راست با هم برابر نباشند، مانند: $f(x)=|x|$ در نقطه‌ی $x=0$. تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1=f'_+(0)\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1=f'_-(0)\end{cases}$$



۳) مشتق چپ یا راست بی‌نهایت شود. مانند: $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$.

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$



۴) مشتق تابع قابل تعیین نباشد. مانند: $f(x)=\begin{cases}x\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=\cos\infty$$

قابل تعیین نیست

یادمان باشد : در توابع دو یا چند ضابطه ای : $y=\begin{cases}f(x) & x\geq a\\ g(x) & x<a\end{cases}$ محور اصلی سوالات برای نقاط مرزی دامنه تابع ا ست $(x=a)$ در این نقاط اول پیوستگی تابع را چک می کنیم ، سپس با توجه به نوع پیوستگی مشتق می گیریم .

۴۷) مشتق پذیری تابع : $f(x)=\begin{cases}2x^2-3 & x\geq 1\\ 3x-4 & x<1\end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید . (حسابان خرداد ۱۴۰۲)

☑پاسخ:

$\lim\limits_{x\to 1^+}2x^2-3=-1=\lim\limits_{x\to 1^-}3x-4=1=f(1)$ تابع در $x=1$ پیوسته است .

$f'_+(1)=4x\big|_{x=1}=4\neq f'_-(1)=3$ تابع در این نقطه مشتق ناپذیر است .

۴۸) اگر $f(x)=\begin{cases} ax+1 & x<0 \\ x^2+3x+1 & x\geq 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق پذیر باشد ، مقدار a را محاسبه کنید . (خرداد ۱۴۰۱)

☑پاسخ:

$$f(0)=\lim_{x\to 0} x^2+3x+1=1=\lim_{x\to 0} a(0)+1$$

$$f'_+(0)=(2x+3)_{x=0}=f'_-(0)=(a) \quad \Rightarrow \quad a=3$$

۴۹) مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطه $x=-1$ بررسی کنید . (دی ماه ۱۴۰۰)

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq -1 \\ 2x+6 & x<-1 \end{cases}$$

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to -1^+} x^2+3=4=\lim_{x\to -1^-} 2x+6=f(1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'_+(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2+3-4}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}=-2 \\ f'_-(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x+6-4}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2(x+1)}{(x+1)}=2 \end{cases}$$

تابع در $x=-1$ مشتق ناپذیر است .

۵۰) تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x\leq 1 \\ x+1 & x>1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید . مشتق پذیری تابع را در نقطه $x=1$ بررسی کنید . (حسابان دی ماه ۱۴۰۲)

☑پاسخ:

تابع در $x=1$ پیوسته است :

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1-2}{x-1}=1$$

چون مشتق چپ و راست با هم برابر نیستند تابع در $x=1$ مشتق ناپذیر است .

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=3$$

۵۱) اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax+1 & x<0 \\ x^2+3x+1 & x\geq 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق پذیری باشد مقدار a را محاسبه کنید . (خرداد ۱۴۰۱)

☑پاسخ:

تابع در $x=0$ پیوسته است :

$$\lim_{x\to 0^-} ax+1=\lim_{x\to 0^+} x^2+3x+1=f(0)=1$$

باید مشتق چپ و راست در $x=0$ برابر باشند.

$$f'_+(0)=(2x+3)_{x=0}=3 \quad = \quad f'_-(0)=a \quad \Rightarrow \quad a=3$$

۵۲) تابع $f(x)=\sqrt{1+|x|}$ در نقطه ی $x=\alpha$ مشتق ندارد. مقدار $f'_+(\alpha)-f'_-(\alpha)$ کدام ا ست ؟ (سراسری خارج کشور)

☑پاسخ:

نقطه مشتق ناپذیری تابع $x=0$ ریشه داخل قدر مطلق ا ست پس داریم :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{1+|0|}=f(0)=1 \quad \Rightarrow \quad f(x)=\sqrt{1+|x|}=\begin{cases}\sqrt{1+x} & x\geq 0\\ \sqrt{1-x} & x<0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1+x}} & x>0\\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & x<0\end{cases}$$

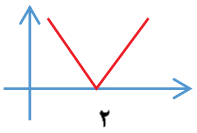
$$f'_+(0)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2} \quad , \quad f'_-(0)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad f'_+(0)-f'_-(0)=1$$

۵۳) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=|x-2|$ را در $x=2$ در صورت وجود بیابید. (نهایی)

☑پاسخ: تابع در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

بررسی پیوستگی

$$\lim_{x\to 2}|x-2|=0=f(2) \quad \Rightarrow \quad f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|-0}{x-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=1=f'_+(2)\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1=f'_-(2)\end{cases}$$



۵۴) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4x+1} & x\geq 2\\ ax^2+bx & x<2\end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است . مقدار b کدام است ؟ (کنکور مجدد ۱۴۰۱)

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{7}{6}$ ۳) $\frac{-5}{6}$ ۴) $\frac{-5}{12}$

☑پاسخ:

$$\begin{cases} f(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{4x+1}=3=\lim\limits_{x\to 2^-}4a+2b & \Rightarrow \quad 4a+2b=3\\ f'(2)=\frac{4}{2\sqrt{4x+1}}\Big|_{x=2}=\frac{4}{6}=f'_-(2)=2ax+b\,|_{x=2} & \Rightarrow \quad 4a+b=\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad b=\frac{7}{3}$$

۵۵) اگر $f(x)=\begin{cases}\sin^2(x-1) & x\geq 1\\ 1-x^2 & x<1\end{cases}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-|h|)-f(1)}{|h|}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

☑پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-|h|)-f(1)}{|h|}=-f'_-(1)=-(1-x^2)'\Big|_{x=1}=2x|_{x=1}=2$$

۵۶) تابع $f(x)=\begin{cases}(x^۲-۱)\sin\frac{x}{۲} & x>۱\\ ۱ & x=۱\\ x^۲-۱ & x<۱\end{cases}$ تعریف شده کدام یک از گزاره های زیر درست ا ست ؟

۱) f در $x=۱$ مشتق دارد.
۲) f در $x=۱$ مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد .
۳) f در $x=۱$ مشتق چپ دارد و لی مشتق راست ندارد .
۴) f در $x=۱$ مشتق چپ و را ست ندارد .

☑پاسخ: $\lim\limits_{x\to ۱^{\pm}} f(x)=۰\neq f(۱)=۱$ تابع نه پیوستگی چپ دارد نه پیوستگی راست پس نه مشتق چپ دارد و نه مشتق راست

۵۷) با فرض $f(x)=\begin{cases}\frac{x-۱}{۱+\sqrt{x}} & x<۱\\ bx+a & x>۱\end{cases}$ اگر حاصل $f'_+(۱)-f'_-(۱)=\frac{۳}{۲}$ باشد. a کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

☑پاسخ:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^-}(\frac{x-۱}{۱+\sqrt{x}})=(\sqrt{x}-۱)=۰\\ \lim\limits_{x\to ۱^+}(bx+a)=b+a\end{cases}$$

شرط پیوستگی

$$\Rightarrow \quad b+a=۰$$

$$f'_-(۱)=(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})_{x=۱}=\frac{۱}{۲} \quad , \quad f'_+(۱)=b \Rightarrow f'_+(۱)-f'_-(۱)=\frac{۳}{۲} \Rightarrow b-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases}b=۲\\ \boxed{a=-۲}\end{cases}$$

۵۸) در تابع با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases}x-\frac{۱}{x} & x\geq ۱\\ x^۲+ax+b & x<۱\end{cases}$ ، مقدار $f'(۱)$ موجود است. $f(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) $۳-\sqrt{۲}$ ۲) $۲-\sqrt{۲}$ ۳) $۲-۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳-۲\sqrt{۲}$

☑پاسخ:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=f(۱)=۰ & \Rightarrow \quad ۰=۱+a+b\\ f'(۱^+)=f'(۱^-) \Rightarrow ۱+\frac{۱}{x^۲}\Big|_{x=۱}=۲x+a\Big|_{x=۱} & \Rightarrow \quad ۲=۲+a\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a=۰ \quad , \quad b=-۱$$

$$f(x)=\begin{cases}x-\frac{۱}{x} & x\geq ۱\\ x^۲-۱ & x<۱\end{cases} \Rightarrow f(۱-\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲})^۲-۱=۲-۲\sqrt{۲}$$

۵۹) فرض کنید $g(x)=ax^۲+bx+c \quad (a\neq ۰)$ ، $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq k \\ g'(x) & x<k \end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b+c=a$ ، کدام است؟ (کنکور تجربی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

☑پاسخ: گزینه ۳

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq k \\ g'(x) & x<k \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲ax+b & x>k \\ ۲a & x<k \end{cases} \Rightarrow ۲ak+b=۲a \Rightarrow k=\frac{۲a-b}{۲a}=۱-\frac{b}{۲a}$$

$$ak^۲+bk+c=۲ak+b \Rightarrow a(۱-\frac{b}{۲a})^۲+b(۱-\frac{b}{۲a})+c=۲a(۱-\frac{b}{۲a})+b$$

$$a+\frac{b^۲}{۴a}-b+b-\frac{b^۲}{۲a}+c=۲a-b-b \Rightarrow a+c-\frac{b^۲}{۴a}=۲a \Rightarrow a+a-b-\frac{b^۲}{۴a}=۲a$$

$$-b-\frac{b^۲}{۴a}=۰ \Rightarrow b=۰ \Rightarrow k=۱ \vee b=-۴a \Rightarrow k=۱-(\frac{-۴a}{۲a})=۱+۲=۳ \qquad \max(k)=۳$$

۶۰) پاسخ هر عبارت ستون A را از بین گزینه‌های ستون B انتخاب کنید.

ستون A
۱) دامنه‌ی مشتق پذیری تابع $y=\sqrt{۱-۲x}$ کدام است؟
۲) مشتق چپ تابع $y=[۲x]$ در نقطه‌ی $x=۱$ کدام است؟
۳) در تابع $y=\lvert ۲-x\rvert$ حاصل $f'_+(۲)+f'_-(۲)$ کدام است؟

ستون B	
الف) ۱	د) صفر
ب) $(\frac{۱}{۲},+\infty)$	هـ) ۴
ج) وجود ندارد	و) $(-\infty,\frac{۱}{۲})$

☑پاسخ:

۱) گزینه‌ی «و» صحیح است.

$$۱-۲x\geq ۰ \Rightarrow D_f=\left(-\infty,\frac{۱}{۲}\right] \Rightarrow f'(x)=\frac{-۲}{۲\sqrt{۱-۲x}} \Rightarrow D_{f'}=(-\infty,\frac{۱}{۲})$$

۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است. تابع در $x=۱$ پیوستگی چپ ندارد، بنابراین مشتق چپ آن وجود ندارد.

$$\lim_{x\to ۱^-}[۲x]=[۲^-]=۱\neq f(۱)=۲$$

۳) گزینه‌ی «د» صحیح است.

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{\lvert ۲-x\rvert-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\lvert x-۲\rvert}{x-۲}=\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{\lvert x-۲\rvert}{x-۲}=۱ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{\lvert x-۲\rvert}{x-۲}=-۱ \end{cases} \Rightarrow f'_+(۲)+f'_-(۲)=۰$$

یادت باشه : $\lvert a-b\rvert=\lvert b-a\rvert$ و $x=۲$ ریشه مرتبه اول داخل قدر مطلقه و مشتق چپ وراست در این نقطه دو عدد قرینه اند .

۶۱) تابع با ضابطه $f(x)=\frac{|x^۳-۲x|}{x}$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است ؟ (خارج ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه (۳)

$$f(x)=\frac{|x^۳-۲x|}{x} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$$

متعلق به دامنه تابع نیست

$$x^۳-۲x=۰ \Rightarrow x(x^۲-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{۲} \\ x=۰ \\ x=\sqrt{۲} \end{cases}$$

بنابراین تابع در $x=۰$ تعریف نشده و مشتق ناپذیر است . از طرفی در نقاط $x=\pm\sqrt{۲}$ تابع زاویه دار و مشتق ناپذیرخواهد بود .

۶۲) اگر $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{۲x^۲+x-۱}$ باشد ، حاصل $\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{۲(x-۱)}$ کدام است ؟ تجربی خارج کشور تیر ۱۴۰۱)

۱) -۱ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ گزینه : ۲

این حد یعنی مشتق تابع $f(x)$ را در $x=۱$ حساب کنید . بنابراین از تابع مشتق می گیرم و جای گذاری می کنیم .

$$f(۱)=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-\frac{۱}{۲}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=f'(۱)$$

$$f'(۱)=\frac{(۱\times\sqrt{x}+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(۲x^۲+x-۱)-(۴x+۱)(x\sqrt{x})}{(۲x^۲+x-۱)^۲} \xrightarrow{x=۱} \frac{\frac{۳}{۲}(۲)-(۵)(۱)}{(۲)^۲}=\frac{-۲}{۴}=\frac{-۱}{۲}$$

۶۳) اگر $f(x)=(|x|-۲)[x]$ آنگاه مقدار $\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۲+۲h)-f(۲)}{h}+\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h}$ کدام است ؟

۱) ۳ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۱

پاسخ گزینه : ۱

نخست داریم :

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۲+۲h)-f(۲)}{h}+\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h}=۲f'_+(۲)-f'_-(۲)$$

در ادامه تکلیف قسمت براکتی و علامت داخل قدر مطلق را تعیین و جای گذاری نموده و مشتق می گیریم .

$$۲^+ \to ۲<x<۳ \Rightarrow \begin{cases} |x|=x \\ [x]=۲ \end{cases} \Rightarrow f(x)=۲(x-۲) \Rightarrow f'_+(۲)=۲$$

$$۲^- \to ۱<x<۲ \Rightarrow \begin{cases} |x|=x \\ [x]=۱ \end{cases} \Rightarrow f(x)=(x-۲) \Rightarrow f'_-(۲)=۱$$

$$۲f'_+(۲)-f'_-(۲)=۴-۱=۳$$

مشتق تابع و تابع مشتق

فرض کنید تابع f در بازه ی (a,b) تعریف شده باشد در این صورت اگر $f'(x)$ در هر نقطه $x\in(a,b)$ حد $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ موجود و متناهی باشد تابع $f'(x)$ تعریف شده ا ست ، بنابراین دامنه ی $f'(x)$ عبارت است از :

$$D_{f'}=\left\{x\in D_f \;\middle|\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ موجود و متناهی}\right\}$$

۶۴) دامنه‌ی تابع مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ را تعیین کنید.

☑پاسخ:

$$D_f=[-1,+\infty)\quad,\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\quad\Rightarrow\quad D_{f'}=[-1,+\infty)-\{-1\}=(-1,+\infty)$$

ریشه‌ی زیر رادیکال و مفرج کسر مشتق

۶۵) تابع مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|2x-1|$ را تعیین نموده و دامنه‌ی آن را بنویسید.

☑پاسخ: *تابع در تمام مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. خب میریم سراغ مشتق پذیری*

$$f(x)=|2x-1|=\begin{cases}2x-1 & x\geq\frac{1}{2}\\ -2x+1 & x<\frac{1}{2}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases}2 & x>\frac{1}{2}\\ -2 & x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

البته می توئیم از راه تعریف مشتق هم بریم

$$f'_+(\tfrac{1}{2})=2\neq f'_-(\tfrac{1}{2})=-2\quad\Rightarrow\quad D_{f'}=R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۶۶) مشتق توابع زیر را حساب کنید. در کدام نقطه از دامنه تابع، مشتق وجود ندارد.

۱) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ۲) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$ ۳) $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$

☑پاسخ:

۱) $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\quad\Rightarrow\quad D_{f'}=R-\{0\}$

۲) $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}(x^2+1)^2}=\frac{x}{(x^2+1)^2\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}}\quad\Rightarrow\quad D_{f'}=R-\{0\}$

۳) $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}\quad\Rightarrow\quad D_{f'}=D_f=R$

۶۷) تابع با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx & x\geq ۱ \\ x^{۳} & x<۱ \end{cases}$ مفروض ا ست ، با فرض $D_f = D_{f'}$ مقدار عددی $a-b$ کدام ا ست ؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

☑پاسخ:

دامنه تابع مشتق با دامنه تابع برابر است یعنی تابع باید در تمام دامنه تابع مشتق پذیر باشد ، به خصوص نقطه ی مرزی دامنه $x=۱$

$ax^{۲}+bx_{|x=۱} = x^{۳}_{|x=۱} \Rightarrow a+b=۱$ اول بررسی پیوستگی

$f'_{-}(۱)=۲a(۱)+b=f'_{+}(۱)=۳(۱)^{۲} \Rightarrow ۲a+b=۳$

$a=۲ \ , \ b=-۱ \Rightarrow a-b=۳$

۶۸)در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید:

الف) دامنه‌ی مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x}$ برابر است با ..... .

ب) شیب خط مماس بر نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ در $x=۱$ برابر است با ..... .

☑پاسخ:

الف) $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow D_f=[۰,+\infty)$ $\qquad f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow D_{f'}=(۰,+\infty)$

ب) $g'(x)=\frac{-۱}{x^{۲}} \Rightarrow m=g'(۱)=-۱$

۶۹) با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $x>۰$ آنگاه $f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$. (حسابان خرداد ۱۴۰۲)

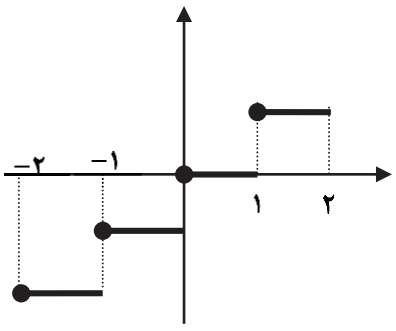
☑پاسخ:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim_{h\to ۰}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

۷۰) دامنه و ضابطه تابع مشتق ، تابع $f(x)=[x]$ را تعیین کنید .

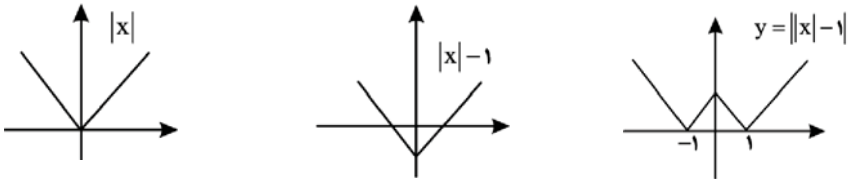
☑پاسخ: تابع در تمام نقاط با طول صحیح پیوستگی راست دارد ولی پیوستگی چپ ندارد در مجموع نا پیوسته است . در نتیجه مشتق ناپذیر است ولی در سایر نقاط پیوسته و مشتق پذیر و مشتقش صفر است .

$$f(x)=[x] \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۰ & x\notin\mathbb{Z} \\ \text{وجود ندارد} & x\in\mathbb{Z} \end{cases}$$



۷۱) دامنه مشتق تابع $f(x)=\big||x|-1\big|$ را تعیین کنید .

☑پاسخ: *تابع در سه نقطه‌ی* $x=1\ ,\ x=0\ ,\ x=-1$ *زاویه‌دار است بنابراین مشتق ناپذیر است.*

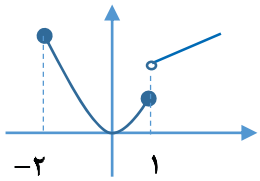


نقطه ضعف توابع قدر مطلقی در مشتق ریشه های مرتبه اول داخل قدر مطلقند تابع در این نقاط گوشه یا زاویه دارست و مشتق چپ و راست در این نقاط دو عدد قرینه می شود . پس :

$$D_{f'}=\mathbb{R}-\{-1\ ,\ 0\ ,\ 1\}$$

۷۲) تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & -2\le x\le 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$ را در نظر بگیرید مشتق پذیری آن را دربازه های $[-2,1]$, $(1,+\infty)$ و $[1,2]$ بررسی کنید .

☑پاسخ:



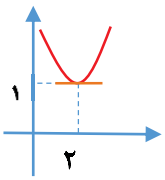
تابع در بازه $[-2,1]$ مشتق پذیر است .

در بازه $(1,+\infty)$ مشتق پذیر است

در بازه $[1,2]$ مشتق ناپذیر است . (چرا ؟) چون تابع در $x=1$ پیوستگی راست ندارد بنابراین در این نقطه مشتق ناپذیر است .

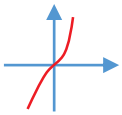
۷۳) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

الف) در یک نقطه برابر صفر باشد .



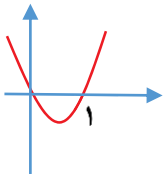
$$f(x)=x^2-4x+5 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=2x-4=0 \quad\Rightarrow\quad x=2$$

ب) در تمام نقاط مثبت باشد .



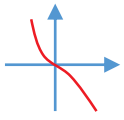
$$f(x)=x^3+x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2+1>0$$

پ)در $x=2$ برابر ۳ باشد .



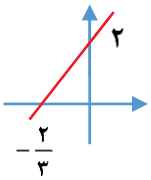
$$f(x)=x^2-x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=2x-1 \quad\Rightarrow\quad f'(2)=2(2)-1=3$$

ت) در تمام نقاط منفی باشد .



$$f(x)=-x^3-2x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-3x^2-2<0$$

ث) در تمام نقاط یکسان با شد .



$$f(x)=3x+2 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=3$$

قضایای مشتق

اگر f, g هر دو در نقطه $x=a$ مشتق پذیر باشند ، آنگاه توابع $f\pm g$, kf, $f\times g$ نیز در $x=a$ مشتق پذیرند و

۱) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

۲) $(kf)'(a)=kf'(a)$

۳) $(f\times g)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$

اگر f و g در $x=a$ مشتق پذیر و g در یک همسایگی a مخالف صفر باشد آنگاه :

۱) $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=\frac{-g'(a)}{g^2(a)}$

۲) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^2(a)}$

۷۴)فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر و a عددی حقیقی باشد با محاسبه و حدگیری نشان دهید تابع $g(x)=f(ax)$ نیز مشتق پذیر و $g'(x)=af'(ax)$ می‌باشد.

☑پاسخ :

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(ax+ah)-f(ax)}{h}=(a)\lim_{h\to 0}\frac{f(ax+ah)-f(ax)}{ah}=af'(ax)$$

۷۵) اگر f, g در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر باشند، نشان دهید.

$$(f\times g)'=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$$

☑پاسخ:

$$(f\times g)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f\times g(x)-f\times g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\big(f(x)-f(a)\big)g(x)+\big(g(x)-g(a)\big)f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}f(a)=$$

$$f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$$

۷۶) اگر توابع f,g مشتق پذیر باشند و $f(۲)=۳$, $f'(۲)=۵$, $g(۲)=۸$, $g'(۲)=-۶$ حاصل $(f\times g)'(۲)$ را به دست آورید (خرداد ۱۴۰۱)

☑پاسخ:

$$(f\times g)_{(۲)}'=f'(۲)g(۲)+g'(۲)f(۲)=۵\times ۸+(-۶)\times ۳=۲۲$$

۷۷) اگر توابع f , g مشتق پذیر باشند و $f(۳)=۵ , f'(۳)=۴ , g(۳)=-۴ , g'(۳)=۳$ حاصل $(\frac{g}{f})'(۳)$ را به دست آورید.

☑پاسخ:

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(۳)=\frac{g'(۳)f(۳)-f'(۳)g(۳)}{f^{۲}(۳)}=\frac{(۳)\times(۵)-(۴)\times(-۴)}{۵^{۲}}=\frac{۳۱}{۲۵}$$

۷۸) تابع f در $x=a$ مشتق پذیر و $f(a)\neq ۰$ ثابت کنید:

$$\left(\frac{۱}{f(x)}\right)'(a)=-\frac{f'(a)}{f^{۲}(a)}$$

☑پاسخ:

$$\left(\frac{۱}{f(x)}\right)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{۱}{f(x)}\right)-\left(\frac{۱}{f(a)}\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(a)-f(x)}{f(x)f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-(f(x)-f(a))}{(x-a)f(x)f(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{-۱}{f(a)f(a)}$$

$$=f'(a)\times\frac{-۱}{f(a)f(a)}=\frac{-f'(a)}{f^{۲}(a)}$$

۷۹) اگر $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}+x+۱}$, $g(x)=x^{۳}-۱$ باشد، حاصل $f'g+g'f$ را به دست آورید.

☑ پاسخ:

بعضی وقتا بهتره اول حاصل ضرب یا تقسیم رو بریم بعد ساده کنیم در نهایت مشتق بگیریم دقت کن

$$f'g+g'f=(f\times g)' \Rightarrow f\times g=\frac{x^{۳}-۱}{x^{۲}+x+۱}=\frac{(x-۱)(x^{۲}+x+۱)}{(x^{۲}+x+۱)}=(x-۱)\Rightarrow f'g+g'f=(x-۱)'=۱$$

۸۰) اگر $g(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x^{۲}+۶x+۹}$, $f(x)=\frac{۱}{x+۳}$ آن گاه حاصل $\frac{g'f'-f''g}{(f')^{۲}}$ در $x=۴$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{-۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

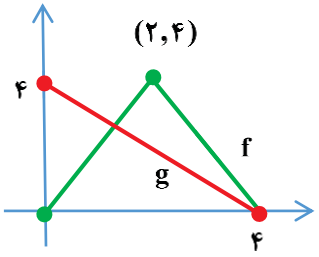
☑ پاسخ:

اول باید تشخیص بدیم مشتق داده شده مشتق چه عبارتیه، بعد که فهمیدیم، اون عبارت رو بسازیم تا جای ممکن ساده کنیم بعد مشتق بگیریم.

$$f(x)=\frac{۱}{x+۳} \quad f'(x)=\frac{-۱}{(x+۳)^{۲}} \quad , \quad g(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x^{۲}+۶x+۹}=\frac{x-\sqrt{x}}{(x+۳)^{۲}}$$

$$\frac{g'f'-f''g}{(f')^{۲}}=\left(\frac{g}{f'}\right)'=\left(\frac{\frac{x-\sqrt{x}}{(x+۳)^{۲}}}{\frac{-۱}{(x+۳)^{۲}}}\right)'=\left(\sqrt{x}-x\right)'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-۱ \Rightarrow f(۴)=\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}-۱=-\frac{۳}{۴}$$

۸۱) نمودار توابع f , g شکل مقابل است مقدارهای زیر را به دست آورید .



الف) اگر $h(x)=f(x)\times g(x)$ مطلوب است : $h'(1)$, $h'(2)$, $h'(3)$

☑ پاسخ :

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 2\\ -2x+8 & 2<x\le 4\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2 & 0<x<2\\ -2 & 2<x<4\end{cases}$$

$$g(x)=-x+4 \qquad \Rightarrow \qquad g'(x)=-1$$

$$h'(x)=f'(x)\times g(x)+g'(x)\times f(x)$$

$$h'(1)=f'(1)\times g(1)+g'(1)\times f(1)=2\times 3+(-1)\times 2=4$$

$$h'(2)=f'(2)\times g(2)+g'(2)\times f(2)\Rightarrow \begin{cases}h'_+(2)=f'_+(2)\times g(2)+g'(2)\times f(2)=-2(2)+(-1)(4)=-8\\ h'_-(2)=f'_-(2)\times g(2)+g'(2)\times f(2)=2(2)+(-1)(4)=0\end{cases}$$

$$h'(3)=f'(3)\times g(3)+g'(3)\times f(3)=(-2)(1)+(-1)(2)=-4$$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است : $k'(1)$, $k'(2)$, $k'(3)$

☑ پاسخ :

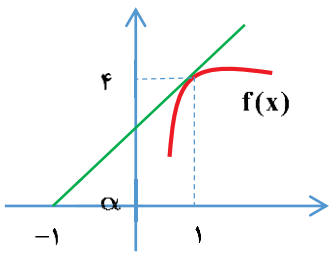
$$k(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$$k(x)=\frac{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}{(g(1))^2}=\frac{2(3)-(-1)(2)}{3^2}=\frac{8}{9}$$

$$k'(x)=\frac{f'(2)g(2)-g'(2)f(2)}{(g(2))^2}=\begin{cases}k'_+(2)=\dfrac{f'_+(2)g(2)-g'(2)f(2)}{(g(2))^2}=\dfrac{-2(2)-(-1)(4)}{4}=0\\ k'_-(2)=\dfrac{f'(2)_g(2)-g'(2)f(2)}{(g(2))^2}=\dfrac{2(2)-(-1)(4)}{4}=2\end{cases}$$

$$k(x)=\frac{f'(3)g(3)-g'(3)f(3)}{(g(3))^2}=\frac{(-2)(1)-(-1)(2)}{1}=0$$

۸۲) با توجه به شکل اگر $g(x)=\dfrac{x^2}{f(x)}$ آنگاه $g'(1)$ کدام است ؟

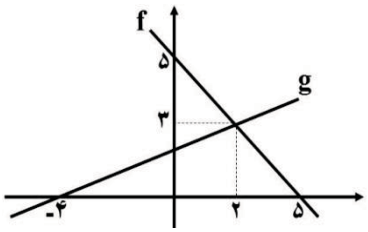


☑ پاسخ :

$$\tan\alpha=m=\frac{4}{2}=2 \qquad \Rightarrow \qquad f'(1)=2$$

$$y'=\frac{2xf(x)-x^2f'(x)}{f^2(x)} \qquad \Rightarrow \qquad y'_{(1)}=\frac{2(1)f(1)-f'(1)}{f^2(1)}=\frac{8-2}{16}=\frac{3}{8}$$

۸۳) نمودار توابع f , g به صورت مقابل است، حاصل $(\frac{f}{g})'(۲)$ کدام است



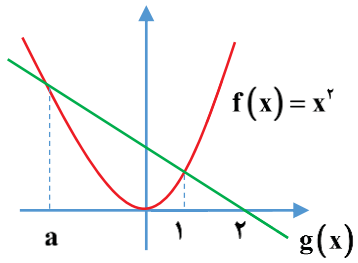
۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) -۳ ۴) -۲

☑ پاسخ :

$$m(f)=f'(x)=\frac{۵-۰}{۰-۵}=-۱ \quad , \quad m(g)=g'(x)=\frac{۳-۰}{۲-(-۴)}=\frac{۱}{۲}$$

$$(\frac{f}{g})'(۲)=\frac{f'(۲)\times g(۲)-g'(۲)\times f(۲)}{(g(۲))^۲}=\frac{(-۱)(۳)-(\frac{۱}{۲})(۳)}{(۳)^۲}=\frac{-۴/۵}{۹}=-\frac{۱}{۲}$$

۸۴) با توجه به نمودار زیر مشتق تابع $\frac{g(x)}{f(x)}$ در نقطه $x=a$ کدام است ؟



۱) $\frac{-۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{-۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

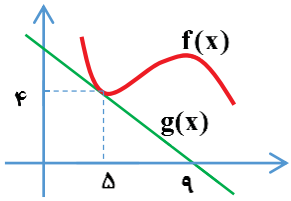
☑پاسخ:

$$y-۰=\frac{۱-۰}{۱-۲}(x-۲) \Rightarrow y=-x+۲ \Rightarrow g(x)=-x+۲ \Rightarrow g'(x)=-۱ \ , \ f'(x)=۲x$$

$$x^۲=-x+۲ \Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۲=a \\ x=۱ \end{cases}$$

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'_{a=-۲}=\frac{g'(a)f(a)-f'(a)g(a)}{f^۲(a)}=\frac{(-۱)\times(۴)-(-۴)\times(۴)}{(۴)^۲}=\frac{۳}{۴}$$

۸۵) در شکل زیر نمودار توابع چند جمله ای f , g داده شده است . اگر $h(x)=\frac{f(۲x-۱)}{g(x^۲-x)}$ باشد . حاصل $h'(۳)$ کدام است ؟



۱) $\frac{-۲۶}{۹}$ ۲) $\frac{۱۴}{۹}$ ۳) ۱۴ ۴) $\frac{-۴}{۳}$

☑ پاسخ:

شیب خط مماس $f'(۵)=-۱ \Rightarrow g(x)=-x+۹ \Rightarrow y-۰=\frac{۴-۰}{۵-۹}(x-۹)=-x+۹$ معادله خط مماس

$$h(x)=\frac{f(۲x-۱)}{g(x^۲-x)} \Rightarrow h'(x)=\frac{۲f'(۲x-۱)\times g(x^۲-x)-(۲x-۱)g'(x^۲-x)\times f(۲x-۱)}{(g(x^۲-x))^۲}$$

$$h'(۳)=\frac{۲f'(۵)\times g(۶)-(۵)g'(۶)\times f(۵)}{(g(۶))^۲}=\frac{۲(-۱)(۳)-(۵)(-۱)(۴)}{(۳)^۲}=\frac{۱۴}{۹}$$

روش‌های محاسبه‌ی مشتق توابع:

$f(x)=c$	$\Rightarrow$	$f'(x)=0$ (مشتق تابع ثابت صفره)
$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=(1)'=0$
$f(x)=ax^n$	$\Rightarrow$	$f'(x)=nax^{n-1}$
$f(x)=au^n$	$\Rightarrow$	$f'(x)=anu^{n-1}u'$
$f(x)=2x^7$	$\Rightarrow$	$f'(x)=14x^6$
$h(x)=f(x)\pm g(x)$	$\Rightarrow$	$h'(x)=f'(x)\pm g'(x)$
$h(x)=f(x)\times g(x)$	$\Rightarrow$	$h'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ (مهمند)
$f(x)=(2x^2+3x-1)(4x^3+2x^2+3)$	$\Rightarrow$	$f'(x)=(4x+3)(4x^3+2x^2+3)+(12x^2+4x)(2x^2+3x-1)$
$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$\Rightarrow$	$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ (مهم)
$h(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$	$\Rightarrow$	$h'(x)=\frac{2x(x-1)-(1)(x^2+1)}{(x-1)^2}$
$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
$f(x)=\frac{au+b}{cu+d}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}u'$
$f(x)=\sqrt[n]{u^m}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$

نکته

$y=(\text{عبارت های جبری})^n \rightarrow y'=n\times(\text{مشتق عبارت جبری})\times(\text{عبارت های جبری})^{n-1}$

۸۶) مشتق بگیرید.

۱) $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(1)x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

۲) $f(x)=\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)^4 \Rightarrow f'(x)=(4)\left(\frac{2(x-2)-(1)(2x+1)}{(x-2)^2}\right)\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)^3$ (توان؛ مشتق عبارت کسری؛ عبارت کسری با یک توان کمتر)

۳) $f(x)=\frac{(3x^2-1)^3}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{3(6x)(3x^2-1)^2(x+1)-(3x^2-1)^3(1)}{(x+1)^2}$

۴) $y=\sqrt{x}(2x-1)^5 \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-1)^5+5(2)(2x-1)^4\sqrt{x}$

۵) $y=\frac{x^2-1}{(3x+5)^2} \Rightarrow y'=\frac{2x(3x+5)^2+2(3)(3x+5)(x^2-1)}{(3x+5)^4}$

۸۷) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$$۱) f(x)=\left(\frac{۲x+۱}{x}\right)^{۵} \qquad ۲)\ g(x)=(\sqrt{۵-۷x})(۴-\frac{x}{۳})$$

☑پاسخ:

$$۱)\ y'=۵(\frac{۲(x)-(۱)(۲x+۱)}{x^{۲}})(\frac{۲x+۱}{x})^{۴}$$

$$۲)\ y'=\frac{-۷}{۲\sqrt{۵-۷x}}(۴-\frac{x}{۳})-\frac{۱}{۳}(\sqrt{۵-۷x})$$

۸۸) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (خرداد ۱۴۰۰)

$$f(x)=\frac{۹x-۲}{\sqrt{x}} \quad , \quad g(x)=(۳x^{۲}-۴)(۲x-۵)^{۳}$$

☑پاسخ:

$$f(x)=\frac{۹x-۲}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۹(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x-۲)}{(\sqrt{x})^{۲}}$$

$$g(x)=(۳x^{۲}-۴)(۲x-۵)^{۳} \Rightarrow f'(x)=(۶x)\times(۲x-۵)^{۳}+۳(۲x-۵)^{۲}(۲)\times(۳x^{۲}-۴)$$

۸۹) مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (خرداد ۱۴۰۱)

☑پاسخ:

$$f(x)=\sqrt{\frac{۹x-۲}{x+۱}}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{۹x-۲}{x+۱}} \Rightarrow f'(x)=\frac{(\frac{۹x-۲}{x+۱})'}{۲\sqrt{\frac{۹x-۲}{x+۱}}}=\frac{\frac{۹(x+۱)-(۹x-۲)}{(x+۱)^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۹x-۲}{x+۱}}}=\frac{\frac{۱۱}{(x+۱)^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۹x-۲}{x+۱}}}$$

۹۰) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (شهریور ۱۳۹۹)

$$f(x)=\sqrt{۳x+۲}(x^{۲}+۱) \quad , \quad g(x)=(x^{۲}+۳x+۱)^{۷} \quad , \quad h(x)=\frac{x^{۲}-۵x+۷}{-۲x+۹}$$

☑پاسخ:

$$f(x)=\sqrt{۳x+۲}(x^{۲}+۱) \Rightarrow f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}(x^{۲}+۱)+(۲x)\sqrt{۳x+۲}$$

$$g(x)=(x^{۲}+۳x+۱)^{۷} \Rightarrow g'(x)=۷(x^{۲}+۳x+۱)^{۶}(۲x+۳)$$

$$h(x)=\frac{x^{۲}-۵x+۷}{-۲x+۹} \Rightarrow h'(x)=\frac{(۲x-۵)(-۲x+۹)-(-۲)(x^{۲}-۵x+۷)}{(-۲x+۹)^{۲}}$$

۹۱) اگر $f(x)=(\frac{۸}{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}})^{۲}$ باشد، حاصل $f'(۸)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۲۴}$ ۲) $\frac{۲۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۳۰۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳۰۵}{۲۴}$

☑پاسخ:

$$f(۸)=۲(\frac{-۸}{x^{۲}}+\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}})(\frac{۸}{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}})=۲(\frac{-۱}{۸}+\frac{۱}{۳})(۱+۴)=۲(\frac{۵}{۲۴})(۵)=\boxed{\frac{۲۵}{۱۲}}$$

۹۲) مشتق توابع زیر را به دست آورید . (ساده کردن الزامی نیست) (خرداد ۱۴۰۲)

$$f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+4) \quad , \quad g(x)=\frac{-7x^2+1}{x-6} \quad , \quad h(x)=(2x^5-1)^4$$

$$f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+4) \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\times(x^3+4)+(3x^2)(\sqrt{3x+2})$$

$$g(x)=\frac{-7x^2+1}{x-6} \Rightarrow g'(x)=\frac{-14x(x-6)-(1)(-7x^2+1)}{(x-6)^2}$$

$$h(x)=(2x^5-1)^4 \Rightarrow h'(x)=4(2x^5-1)^3(10x^4)$$

☑پاسخ:

۹۳) اگر $f(x)=2x^3+1$, $g(x)=\sqrt{x}$ باشند . حاصل $(f+g)'(4)+(f\times g)'(1)$ را به دست آورید . (حسابان دی ماه ۱۴۰۲)

☑پاسخ:

$$(f+g)'(4)+(f\times g)'(1)=(6(x^2)+\frac{1}{2\sqrt{x}})(4)+(6(x^2)\times\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(2x^3+1))(1)=$$

$$=(96+\frac{1}{4})+((6)(1)+\frac{1}{2}(3))=96+\frac{1}{4}+6+\frac{3}{2}=\frac{415}{4}$$

۹۴) خط d در نقطه $(-1,5)$ بر نمودار تابع f مماس است . اگر شیب خط d برابر $\frac{-1}{2}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x}f(x)$ باشد ، مقدار $g'(-1)$ کدام است ؟

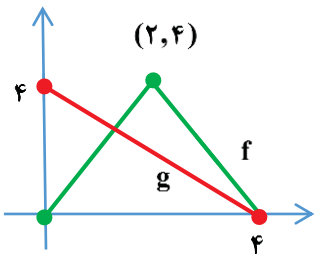
۱) $\frac{-4}{3}$ ۲) $\frac{-1}{3}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) $\frac{13}{6}$ (کنکور دی ۱۴۰۱)

☑ **پاسخ:** با توجه به فرض مسئله داریم : $f'(-1)=\frac{-1}{2}$, $f(-1)=5$ در نتیجه :

$$g'(-1)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\times f(x)+\sqrt[3]{x}\times f'(x)\Big|_{x=-1}=\frac{1}{3}\times 5+(-1)\times\frac{-1}{2}=\frac{13}{6}$$

۹۵) نمودار توابع f , g شکل مقابل است اگر $h(x)=fog(x)$ آنگاه $h'(3)$ را به دست آورید .

☑ پاسخ :



$$f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 2\\ -2x+8 & 2<x\le 4\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2 & 0<x<2\\ -2 & 2<x<4\end{cases}$$

$$g(x)=-x+4 \Rightarrow g'(x)=-1$$

$$\xrightarrow[g(x)=-x+4]{f(x)=2x} h'(3)=g'(3)f'(g(3))=g'(3)f'(1)=(-1)(2)=-2$$



$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+mh)-f(x)}{h}=mf'(x)\\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+mh)-f(x+nh)}{rh}=\dfrac{m-n}{r}f'(x)\end{cases}$$

۹۶) اگر $f(x)=3x^2+4x$ باشد حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h-1)-f(-1)}{4h}$ کدام است ؟

۱) ۱ ۲) -۱
۳) -۲ ۴) ۲

☑پاسخ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h-1)-f(-1)}{4h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{4h}=\frac{2}{4}f'(1)=\frac{2}{4}(6x+4)_{x=-1}=-1$$

۹۷) فرض کنید $f(x)=x^3-x^2$ در این صورت $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h^3+2h^2+3h}$ کدام است ؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{3}{5}$
۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۵

☑پاسخ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h^3+2h^2+3h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{3h}=\frac{2+2}{3}f'(1)=\frac{4}{3}(3x^2-2x)_{x=1}=\frac{4}{3}$$

۹۸) فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=\sin^2\dfrac{\pi}{x^2+1}$ حاصل $f'(\sqrt{3})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

☑پاسخ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=2f'(x)=\sin^2\frac{\pi}{x^2+1} \Rightarrow 2f'(\sqrt{3})=\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow f'(\sqrt{3})=\frac{1}{4}$$

۹۹) اگر $f(x)=\frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(\frac{1}{4}+h)-f(\frac{1}{4})}{h}$ کدام است ؟ (خارج کشور ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینه : ۳ : حد خواسته شده عملاً مشتق تابع در $x=\frac{1}{4}$ است . بنابراین :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\frac{1}{4}+h)-f(\frac{1}{4})}{h}=f'(\frac{1}{4}) \Rightarrow f'(x)=\frac{-1(\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{x} \Rightarrow f'(\frac{1}{4})=\frac{(-1)\frac{1}{2}+(1)(\frac{5}{4})}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$$

اندکی پیشتر (فقط سوالات تستی) : برای محاسبه حد های مرتبط با تعریف مشتق می توان از قاعده هوپیتال برای رفع ابهام استفاده کرد .

۱۰۰) اگر $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x+3}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^2(5-h)-3f(5-h)+2}{h(5-h)}$ کدام است ؟ (کنکور تیر ۱۴۰۱)

۱) $\frac{13}{30}$ ۲) $\frac{-5}{12}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{13}{15}$

پاسخ گزینه : ۲ : تابع f در $x=5$ تعریف شده و مشتق پذیر است .

$$f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x+3} \Rightarrow f'(x)=1\times\sqrt[3]{x+3}+\frac{(x-4)}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(5-h)-3f(5-h)+2}{h(5-h)}\overset{\frac{0}{0}\ hop}{=}\lim_{h\to 0}\frac{-2f(5-h)f'(5-h)+3f'(5-h)+2}{5-2h}=\frac{-2f(5)f'(5)+3f'(5)}{5}$$

$$=f'(5)(\frac{-2f(5)+3}{5})=(\frac{25}{12})(\frac{-2(2)+3}{5})=\frac{-5}{12}$$

سوال تکمیلی : با توجه به شکل مقابل حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{f(3+\Delta x)}-\sqrt{f(3)}}{(\Delta x)^2-\Delta x}$ کدام است ؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{-1}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{-3}{4}$

معادله خط مماس در نقطه $(3,4)$ $L: y-f(3)=f'(3)(x-4) \Rightarrow y=f'(3)(x-4)+f(3) \xrightarrow{(1,0)\in L} 0=f'(3)(1-4)+4 \Rightarrow f'(3)=\frac{4}{3}$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{f(3+\Delta x)}-\sqrt{f(3)}}{(\Delta x)^2-\Delta x}\times\frac{\sqrt{f(3+\Delta x)}+\sqrt{f(3)}}{\sqrt{f(3+\Delta x)}+\sqrt{f(3)}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{(\Delta x)^2-\Delta x}\times\frac{1}{\sqrt{f(3+\Delta x)}+\sqrt{f(3)}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{-\Delta x}\times\frac{1}{\sqrt{f(3+\Delta x)}+\sqrt{f(3)}}=-f'(3)\times\frac{1}{2\sqrt{f(3)}}=-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{-1}{3}$$

راه دوم : استفاده از قاعده هوپیتال (متغییره صفر شونده اینجا Δx است بر حسب آن از صورت و مخرج کسر مشتق جداگانه می گیریم)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{f(3+\Delta x)}-\sqrt{f(3)}}{(\Delta x)^2-\Delta x}\xrightarrow{hop}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f'(3+\Delta x)}{2\sqrt{f(3+\Delta x)}}}{2\Delta x-1}=\frac{f'(3)}{-2\sqrt{f(3)}}=\frac{\frac{4}{3}}{-2\sqrt{4}}=\frac{-1}{3}$$

گزینه ۲ درست است .

مشتق توابع مرکب

فرض کنیم تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر و تابع $f(x)$ در $g(a)$ مشتق پذیر باشد. آن‌گاه تابع $h(x)=f(g(x))$ در $x=a$ مشتق پذیر است و داریم:

$$h(x)=f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad h'(a)=g'(a)f'(g(a))$$

$$(f(u))'=u'f'(u) \quad , \quad ((u)^m)'=m(u')(u)^{m-1}$$

۱۰۱) اگر $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=\frac{-2}{3}$ باشد، مشتق تابع $f(\sqrt{x-1})$ در $x=5$ را به دست آورید.

☑پاسخ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}=-f'(2)=\frac{-2}{3} \quad \Rightarrow \quad f'(2)=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad (f(\sqrt{x-1}))'=\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}f'(\sqrt{x-1})\right)_{x=5}=\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

۱۰۲) اگر $f'(x)=\frac{1}{2x^2+3}$ باشد، آن‌گاه مشتق تابع $f\left(\frac{1}{x}\right)$ را در $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ به دست آورید.

☑پاسخ:

$$\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\frac{-1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)_{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left(\frac{-1}{x^2}\right)\times\left(\frac{1}{2\left(\frac{1}{x}\right)^2+3}\right)_{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-2\times\frac{1}{2\times(2)+3}=\frac{-2}{7}$$

۱۰۳) اگر $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$ باشد، مشتق تابع $y=f(5x^2-x)$ را نسبت به x تعیین کنید. (نهایی)

☑پاسخ:

$$y=f(5x^2-x) \quad \Rightarrow \quad y'=(5x^2-x)'f'(5x^2-x) \quad \Rightarrow \quad y'=(10x-1)f'(5x^2-x)=(10x-1)\sqrt{(5x^2-x)^2+1}$$

۱۰۴) مشتق $f(\sqrt[3]{6x+2})$ در نقطه‌ی $x=1$ برابر -2 است. مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

☑ پاسخ:

$$\sqrt[3]{6x+2}=2 \quad \Rightarrow \quad x=1 \quad \Rightarrow \quad (f(\sqrt[3]{6x+2}))_{x=1}=\left(\frac{6}{3\sqrt[3]{(6x+2)^2}}f'(\sqrt[3]{6x+2})\right)_{x=1}=\frac{6}{12}f'(2)=-2 \quad \Rightarrow \quad f'(2)=-4$$

۱۰۵) اگر f , g توابع مشتق پذیر باشند و $f'(2)=3$, $g(3)=2$, $g'(3)=5$ ، مشتق تابع $y=f(g(x))$ در $x=3$ را تعیین کنید .

☑ پاسخ

$$y=f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad y'(3)=g'(3)f'(g(3))=g'(3)f'(2)=5\times 3=15$$

۱۰۶) مشتق توابع زیر را به دست آورید.

☑ پاسخ

$$f(x)=\left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8 \Rightarrow f'(x)=8\left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^7\frac{(-3)(x^2+5)-(2x)(-3x-1)}{(x^2+5)^2}$$

$$g(x)=\sqrt[3]{\frac{-3x-1}{x^2+5}} \Rightarrow g'(x)=\frac{(-3)\times(x^2+5)-(2x)\times(-3x-1)}{(x^2+5)^2}$$
$$3\times\sqrt[3]{\left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^2}$$

۱۰۷) مشتق تابع $f(x)=\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$ را به دست آورید (ساده کردن الزامی نیست) (خرداد ۱۴۰۱)

☑ پاسخ

$$f(x)=\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}} \xrightarrow{(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}} f'(x)=\frac{(9)(x+1)-(1)(9x-2)}{(x+1)^2}\Big/2\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$$

۱۰۸) در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$، حاصل $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$، کدام است؟

۱) -21 ۲) -18 ۳) 12 ۴) 15

☑پاسخ:

$$f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3 \Rightarrow f'=3\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^2\frac{\frac{-7}{(2x-3)^2}}{2\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2) \Rightarrow f'(2)=-21$$

۱۰۹) اگر $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{1-\sqrt{x}}=5$، مشتق تابع $y=f(\frac{2}{x})$ در $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{-5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{-5}{4}$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{1-\sqrt{x}}=5=\lim_{x\to1}(1+\sqrt{x})\frac{f(x)-f(1)}{(1+\sqrt{x})1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to1}(1+\sqrt{x})\left(-\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)=-2f'(1)=5$$

☑پاسخ:

$$f'(1)=\frac{-5}{2} \Rightarrow \left(f\left(\frac{2}{x}\right)\right)'_{x=2}=\frac{-2}{x^2}f'\left(\frac{2}{x}\right)_{x=2}=\frac{-1}{2}f'(1)=\frac{-1}{2}\times\frac{-5}{2}=\frac{5}{4}$$

۱۱۰) اگر مشتق $y=f(3x-1)$ در نقطه $x=1$ برابر ۶ باشد مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+3x)-f(2)}{x}$ کدام است ؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

☑پاسخ:

$$y=f(3x-1) \Rightarrow y'=3f'(3x-1) \Rightarrow y'_{x=1}=3f'(2)=6 \Rightarrow f'(2)=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2+3x)-f(2)}{x}=3f'(2)=3\times 2=6$$

۱۱۱) اگر $f(x)=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}|x|$ و $g(x)=4x+|x|$ باشند، مشتق تابع fog، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) مشتق ندارد.

☑پاسخ:

$$f(x)=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}|x|=\begin{cases}\frac{3}{5}x & x\geq 0\\ x & x<0\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}5x & x\geq 0\\ 3x & x<0\end{cases}$$

$$fog=\begin{cases}3x & x\geq 0\\ 3x & x<0\end{cases} \qquad (fog)'=3$$

۱۱۲) هرگاه $f(2x+1)+3f(1-2x)=16x^2-8x+8$ باشد مقدار $f'(1)$ کدام ا ست ؟

۱) ۸- ۲) ۲-
۳) ۸ ۴) ۲

☑پاسخ:

$$f(2x+1)+3f(1-2x)=16x^2-8x+8 \Rightarrow 2f'(2x+1)-6f'(1-2x)=32x-8 \xrightarrow{x=0} -4f'(1)=-8 \Rightarrow f'(1)=2$$

۱۱۳) اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{3}{2}$، $g(x)=\sqrt{x+1}$ باشد آنگاه $(fog)'(0)$ کدام ا ست ؟

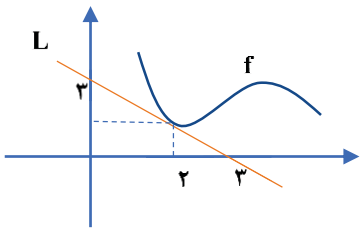
۱) $\frac{-2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

☑پاسخ:

$$g(x)=\sqrt{x+1} \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad , \quad f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{3}{2}$$

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}f'(g(x)) \Rightarrow (fog)'(0)=g'(0)f'(g(0))=\frac{1}{2\sqrt{0+1}}f'(1)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

۱۱۴) نمودار تابع f شکل مقابل است . اگر $g(x)=\frac{x^۳}{f^۲(۳-x)}$ مقدار $g'(۱)$ کدام است ؟



۱) -۱ ۲) ۵

۳) ۱ ۴) -۵

پاسخ: گزینه ۳

$$L: y-۳=\frac{۰-۳}{۳-۰}(x-۰) \Rightarrow y=-x+۳ \Rightarrow \begin{cases} f'(۲)=-۱ \\ f(۲)=-(۲)+۳=۱ \end{cases}$$

$$g(x)=\frac{x^۳}{f^۲(۳-x)} \Rightarrow g'(x)=\frac{۳x^۲f^۲(۳-x)-(۲)f(۳-x)(-۱)f'(۳-x)\times(x^۳)}{f^۴(۳-x)}$$

$$g'(۱)=\frac{۳(۱)f^۲(۲)-۲f(۲)(-۱)f'(۲)(۱^۳)}{f^۴(۲)}=\frac{۳(۱)(۱)-۲(۱)(-۱)(-۱)(۱)}{۱^۴}=۱$$

۱۱۵) اگر $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۵]{x+|x|}}$ ، $g(x)=\frac{۱}{x^۵+|x^۵|}$ باشد مقدار $g'(\sqrt[۵]{۳})f'(g(\sqrt[۵]{۳}))$ کدام است ؟ (تجربی تیر ۱۴۰۲ خارج کشور)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{-۱}{۳}$ ۳) -۱ ۴) ۱

پاسخ : گزینه (۳)

$$g'(\sqrt[۵]{۳})f'(g(\sqrt[۵]{۳}))=(fog)'(\sqrt[۵]{۳})$$

$$x>۰ \Rightarrow g(x)=\frac{۱}{۲x^۵} \quad , \quad x>۰ \Rightarrow f(x)=\frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲x}} \xrightarrow{x>۰} fog(x)=\frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲(\frac{۱}{۲x^۵})}} \Rightarrow fog(x)=-x$$

$$(fog)'(x)=-۱ \Rightarrow (fog)'(\sqrt[۵]{۳})=-۱$$

۱۱۶) خط به معادله $y=۳x-۵$ در نقطه $x=۲$ بر نمودار تابع $y=g(x)$ مماس است . اگر $\lim\limits_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳}$ باشد ، $(fog)'(۲)$ کدام است ؟ (۹۸)

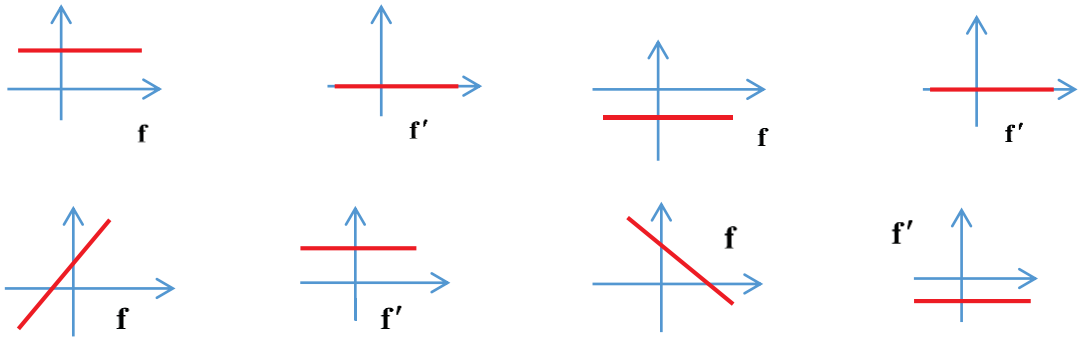
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه (۴)

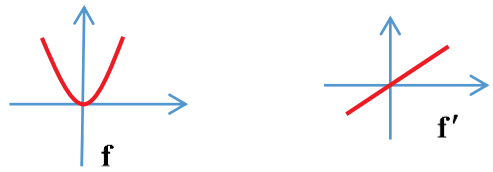
$$y=۳x-۵ \Rightarrow \begin{cases} g(۲)=۱ \\ g'(۲)=۳ \end{cases} \quad , \quad \lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\frac{۱}{۲}f'(۱)=\frac{۲}{۳} \Rightarrow f'(۱)=\frac{۴}{۳}$$

$$(fog)'(۲)=g'(۲)\times f'(g(۲))=g'(۲)\times f'(۱)=۳\times\frac{۴}{۳}=۴$$

نمودار توابع f , f'



۱-در هر بازه که f اکیداً صعودی باشد . نمودار f' بالای محور x هاست یعنی مثبت است و در هز بازه که اکیداً نزولی باشد ، نمودار f' زیر محور x ها است یعنی منفی خواهد بود .



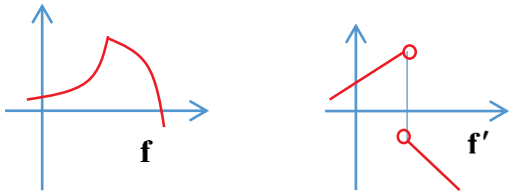
۲-در هربازه که نمودار f ثابت باشد (خط افقی باشد) نمودار f' روی محور x ها است .



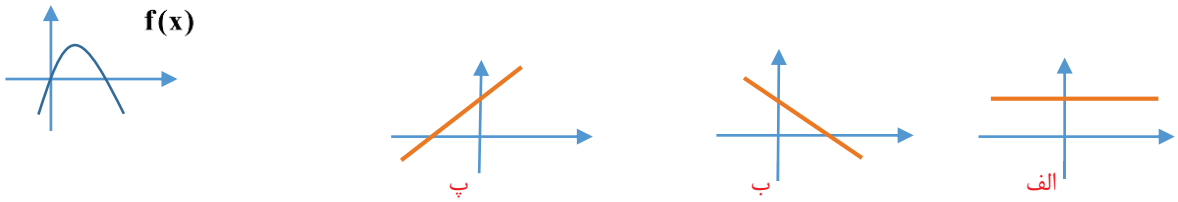
۳-اگر نمودار f خط راست مایل باشد نمودار f' خط افقی خواهد بود .



۴- اگر f در $x=a$ زاویه دار باشد ، f' در $x=a$ نا پیوسته است .



۱۱۷) نمودار تابع $f(x)$ شکل مقابل است با بیان دلیل مشخص کنید کدام یک از نمودار های زیر نمودار مشتق تابع $f(x)$ است (خرداد ۹۸)



☑پاسخ:

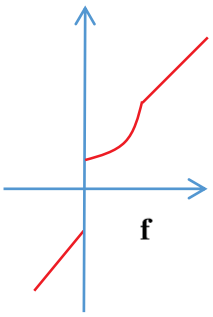
تابع ابتدا صعودی است پس مشتق مثبت است و سپس تابع به ماکسیمم می رسد و مشتق صفر می شود در نهایت تابع نزولی است پس مشتق منفی می شود . در نتیجه گزینه ب درست است .

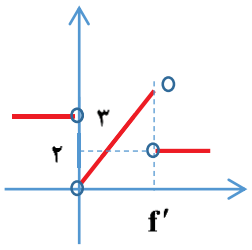
۱۱۸) اگر تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد، ضابطه و نمودار تابع f' را بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases}۳x-۲ & x<۰\\ x^۲+۱ & ۰\le x\le ۲\\ ۲x+۱ & x>۲\end{cases}$$

☑پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases}۳x-۲ & x<۰\\ x^۲+۱ & ۰\le x\le ۲\\ ۲x+۱ & x>۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۳ & x<۰\\ ۲x & ۰<x<۲\\ ۲ & x>۲\end{cases}$$

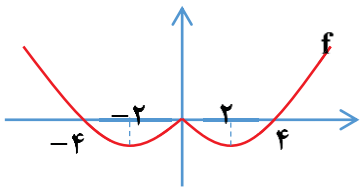


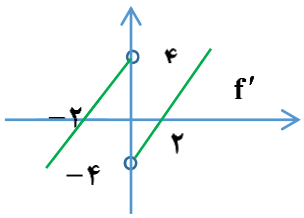


۱۱۹) نمودار مشتق (f') تابع با ضابطه $f(x)=x^۲-۴|x|$ را رسم کنید .

☑ پاسخ:

$$f(x)=x^۲-۴|x|=\begin{cases}x^۲-۴x & x\ge ۰\\ x^۲+۴x & x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x-۴ & x>۰\\ ۲x+۴ & x<۰\end{cases}$$



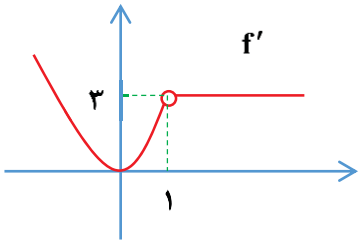


۱۲۰) اگر $f(x)=\begin{cases}x^۳ & x\le ۱\\ ۳x & x>۱\end{cases}$ باشد نمودار تابع $f'(x)$ را رسم کنید .

☑ پاسخ: تابع در $x=۱$ نا پیوسته و مشتق ناپذیر است .

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^-}x^۳=۱\neq\lim_{x\to ۱^+}۳x=۳$$

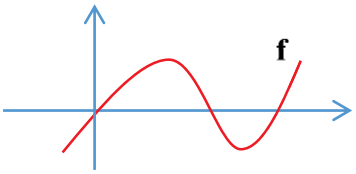
$$f(x)=\begin{cases}x^۳ & x\le ۱\\ ۳x & x>۱\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۳x^۲ & x<۱\\ ۳ & x>۱\end{cases}$$

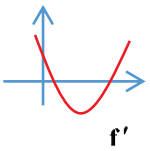


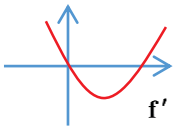
تابع در $x=۱$ مشتق چپ دارد ولی راست ندارد چون در این نقطه پیوستگی راست ندارد .

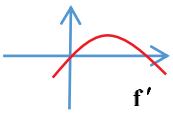
$$\begin{cases}f'_-(۱)=۳\\ f'_+(۱)=\end{cases}$$

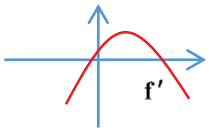
۱۲۱) نمودار تابع f شکل مقابل است نمودار f' کدام است ؟



(۱ 

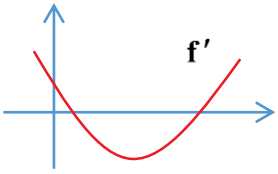
(۲ 

(۳ 

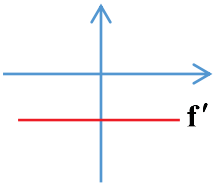
(۴ 

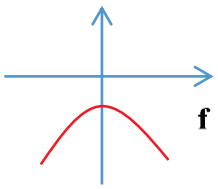
☑پاسخ:

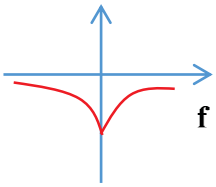
تابع ابتداء صعودی است پس مشتق مثبت است سپس مشتق صفر می شود و چون بعد از این نقطه تابع نزولی است مشتق منفی دوبار مشتق صفر می شود پس از این نقطه تابع صعودی است و مشتق مثبت می شود در مبدا هم مشتق مثبت است پس گزینه ۱ کاملا درست است .

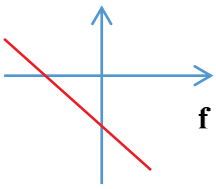


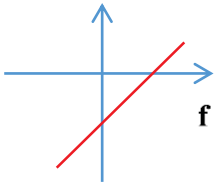
۱۲۲) اگر نمودار تابع f' شکل مقابل باشد نمودار f کدام گزینه است .



(۱ 

(۲ 

(۳ 

(۴ 

☑پاسخ:

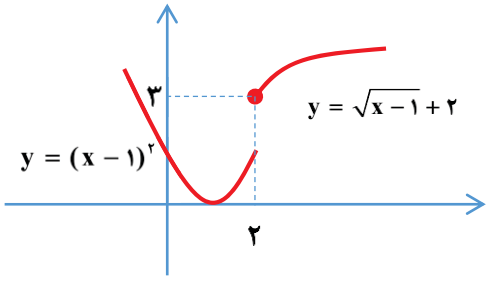
f' خطی افقی (تابع ثابت) و منفی است بنابراین تابع f تابعی خطی (مایل) و نزولی است .بنابراین گزینه ۳ درست است .

۱۲۳) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}+2 & x\geq 2\\ (x-1)^2 & x<2\end{cases}$ را رسم کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید (دی ماه ۱۴۰۱ با تغییر)

الف) آیا تابع f در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است ؟

ب) آیا تابع در بازه $(-\infty,2)$ مشتق پذیراست چرا ؟

پ) مشتق راست تابع f در $x=2$ را به دست آورید .



☑ پاسخ:

الف) مطابق شکل ، تابع در $x=2$ پیوستگی راست دارد ، ولی پیوستگی چپ ندارد بنابراین در این نقطه مشتق ناپذیر است .

ب) تابع دراین بازه $(-\infty,2)$ چون چند جمله ای خطی است و در تمام نقاط این بازه مشتق دارد بنابراین مشتق پذیر است و داریم :

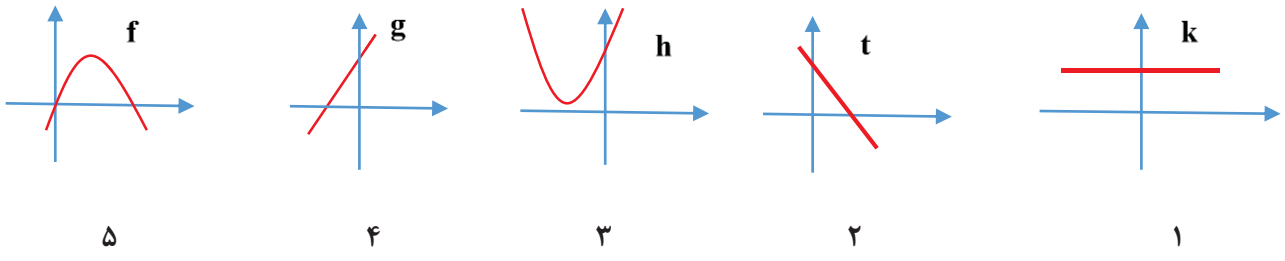
$y'=2(x-1)$

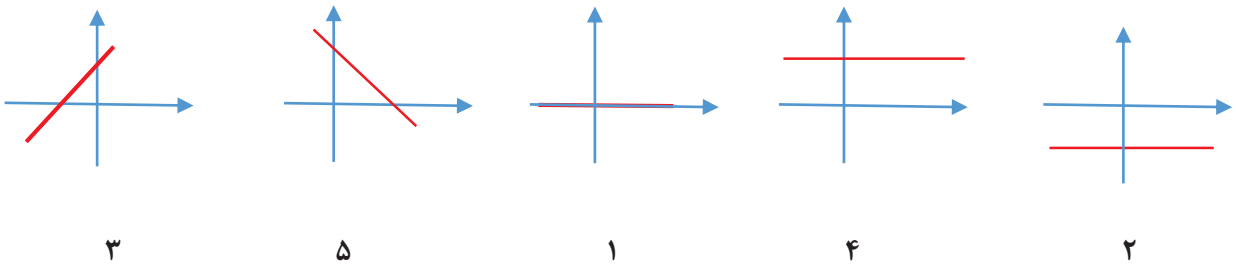
$x\geq 2 \quad f(x)=\sqrt{x-1}+2$

پ)

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-1}+2-(3)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\,(\sqrt{2-1}+1)}=\frac{1}{2}$$

۱۲۴) نمودار توابع f , g , h , t , k را به نمودار مشتق آنها نظیر کنید .





مشتق توابع شامل عامل صفر کننده:

همان‌طور که می‌دانیم مشتق حاصل‌ضرب به شکل روبه‌رو محاسبه می‌شود.

$$(uv)'_a = u'_a v_a + v'_a u_a$$

حال در توابعی به فرم $f(x)=u_{(x)}v_{(x)}$ که در آن $u_{(a)}=0$ و $v_{(x)}$ در $x=a$ پیوسته باشد، داریم:

$$f'(a)=u'_{(a)}v_{(a)}$$

$$f'(a)=(\text{مشتق عامل صفر کننده})(\text{مابقی عوامل})$$

روش حل مسئله

در توابعی که به صورت ضرب چند عامل در هم می‌باشند، اگر مشتق را در نقطه‌ای بخواهند که یکی از عامل‌ها در آن صفر می‌شود، کافی است فقط از عامل صفرکننده مشتق گرفته و در بقیه عبارت‌ها ضرب کنیم، و سپس طول نقطه را در آن قرار دهیم.

۱۲۵) مشتق تابع $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ مفروض است. مشتق آن را در نقطه $x=-4$ به دست آورید.

پاسخ:

عامل صفر $(x+4)$ است. بنابراین از این عبارت مشتق گرفته در الباقی فقط مقدار گذاری می‌کنیم.

مشتق عامل صفر — الباقی

$$f'(-4)=(1)\underbrace{(-4+1)(-4+2)(-4+3)}=-6$$

۱۲۶) مقدار مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=(x-1)\sqrt[3]{\frac{x+2}{2x-1}}$ را در نقطه‌ی $x=1$ به دست آورید.

پاسخ:

مشتق عامل صفر — الباقی

$$y'(1)=(1)\times\left(\sqrt[3]{\frac{x+2}{2x-1}}\right)\Big|_{x=1}=(1)\sqrt[3]{\frac{3}{1}}=\sqrt[3]{3}$$

۱۲۷) اگر $f(x)=(x^2-x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

۱) -6 ۲) -3 ۳) $\frac{-3}{2}$ ۴) $\frac{-3}{4}$

پاسخ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)=(2x-1)\times\sqrt[3]{x^2-7x}\Big|_{x=-1}=-3\times 2=-6$$

مشتق عامل صفر — الباقی

۱۲۸) اگر $f(x)=\frac{x(x+5)(x+6)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$ باشد، مقدار $f'(-5)$ را به دست آورید

پاسخ:

مشتق عامل صفر — الباقی

$$f'(-5)=(1)\times\left(\frac{(x)(x+6)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}\right)\Big|_{x=-5}=\frac{-5}{24}$$

مشتق توابع شامل براکت



در توابعی که شامل براکت هستند ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه داده شده بررسی می کنیم . سپس در یک همسایگی مناسب پیرامون $x=a$ تکلیف قسمت براکتی را تعیین نموده یعنی عدد صحیح متناسب با آن را قرار می دهیم . در نهایت با توجه به نوع پیوستگی مشتق می گیریم .

۱۲۹) در تابع با ضابطه $f(x)=|x|[x]$ مقدار $f'_-(0)-f'_+(0)$ کدام است ؟ (سراسری تجربی ۸۷)

۱) -1 ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to 0}|x|[x]=|0|[0^{\pm}]=0$$ این یعنی پیوسته است

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{|x|[x]-0}{x-0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x[0^+]-0}{x-0}=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x[0^-]-0}{x-0}=1\end{cases}$$ ولی مشتق چپ وراستش متفاوته

۱۳۰) مجموع مشتق چپ و راست تابع $f(x)=x^2+x[x]-3$ در نقطه $x=0$ کدام است ؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

☑پاسخ :

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} x^2+x[x]-3=0+0[0^{\pm}]-3=-3$$

$$\begin{cases}\xrightarrow{|0^+|=0} f'_+(0)=(x^2+x(0)-3)'_{x=0}=(2x)_{x=0}=0\\ \xrightarrow{|0^-|=-1} f'_-(0)=(x^2+x(-1)-3)'_{x=0}=(2x-1)_{x=0}=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow (-1)+(0)=-1$$

۱۳۱) اگر $f(x)=(x-1)[2x+1]$ مقدار $f'_+(1)-f'_-(1)$ کدام است ؟

۱) -1 ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to 1^{\pm}}(x-1)[2x+1]=0[3^{\pm}]=0=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)[2x+1]}{x-1}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}[2x+1]=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-}[2x+1]=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_+(1)-f'_-(1)=3-2=1$$

۱۳۲) اختلاف مشتق چپ و راست تابع $f(x)=|x^۲-۹|[۲x]$ در $x=۳$ چقدر است؟

۱) ۶۶ ۲) ۶ ۳) ۳۶ ۴) ۱۸

☑پاسخ:

تابع در $x=۳$ پیوسته است چون : $f(۳)=۰=\lim\limits_{x\to ۳}|x^۲-۹|[۲x]=۰$ پس مشتق چپ و راست را حساب کرده و از هم کم می کنیم .

$$\begin{cases} x>۳ \xrightarrow{[۲\times ۳^+]=۶} f(x)=(x^۲-۹)\times ۶ \Rightarrow f'(x)=۱۲x \Rightarrow f'_+(۳)=۱۲\times ۳=۳۶ \\ x<۳ \xrightarrow{[۲\times ۳^-]=۵} f(x)=-(x^۲-۹)\times ۵ \Rightarrow f'_-(۳)=-۱۰x \Rightarrow f'_-(۳)=-۱۰\times ۳=-۳۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳۶-(-۳۰)=\boxed{۶۶}$$

۱۳۳) اگر $f(x)=\frac{x^۲}{|۱-x|}[x]$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

☑پاسخ:

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=f'_+(۳) \Rightarrow f(x)=\frac{x^۲}{|۱-x|}[x] \quad x>۳ \xrightarrow{[۳+]=۳} f(x)=\frac{x^۲}{x-۱}\times ۳=\frac{۳x^۲}{x-۱}$$

$$f'(۳)=\frac{۶x(x-۱)-۳x^۲}{(x-۱)^۲}\Big|_{X=۳}=\frac{۳۶-۲۷}{۴}=\frac{۹}{۴}=$$

۱۳۴) اگر $f(x)=x[۲x+۱]$ مقدار $f'_+(۱)-f'_-(۱)$ کدام ا ست ؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) قابل تعیین نیست

☑پاسخ:

به ازای $x=۱$ داخل براکت صحیح می شود و تابع داخل براکت صعودی ا ست پس تابع در $x=۱$ فقط پیوستگی راست دارد و پیوستگی چپ ندارد . بنابراین مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد

$$f'_+(x)_{x=۱}=(۳x)'=۳$$

$f'_-(x)_{x=۱}=$ چون پیوستگی چپ ندارد مشتق چپ ندارد

۱۳۵) اگر $y=\frac{x}{\sqrt{۱+x}}$ آنگاه حاصل $y^۲+۲y'y(x+۱)$ کدام است؟

۱) $x^۲$ ۲) $۲x$ ۳) $۴x$ ۴) $-۲x$

☑پاسخ:

$$y^۲+۲y'y(x+۱)=\left(y^۲(x+۱)\right)'=\left(\frac{x^۲}{۱+x}(x+۱)\right)'=۲x$$

۱۳۶) اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ آن گاه مقدار $\left(f^{-1}\right)'(2)$ کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱

☑پاسخ:

$$y=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow yx+y=x-1 \Rightarrow x(y-1)=-1-y \Rightarrow x=\frac{-y-1}{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-x-1}{x-1}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{-x-1}{x-1} \Rightarrow \left(f^{-1}(x)\right)'=\frac{2}{(x-1)^2} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(2)=2$$

راه حل حرفه ای

یادت باشه

$$(f^{-1}(b))'=\frac{1}{f'(a)} \xrightarrow{\frac{x-1}{x+1}=2=b \Rightarrow x=-3=a} \left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'(-3)}=\left(\frac{1}{\frac{2}{(x+1)^2}}\right)_{x=-3}=2$$

۱۳۷) با فرض $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} & x<1\\ bx+a & x>1\end{cases}$ اگر حاصل $f'_+(1)-f'_-(1)=\frac{3}{2}$ باشد. a کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۳-

☑پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} & x\le 1\\ bx+a & x>1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-1 & x\le 1\\ bx+a & x>1\end{cases} \Rightarrow b+a=0$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}} & x<1\\ b & x>1\end{cases} \Rightarrow f'(1^-)=\frac{1}{2} \quad , \quad f'(1^+)=b$$

$$b-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow b=2 \Rightarrow b+a=0 \Rightarrow a=-2$$

۱۳۸) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-2x} & x\le -2\\ -\frac{1}{2}x^2+bx+c & x>-2\end{cases}$ در $x=-2$ مشتق پذیر است ، مقدار c کدام است ؟ (تجربی داخل ۹۹)

۱) $\frac{-2}{3}$ ۲) $\frac{-1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ : گزینه ۳

$$\begin{cases}f'_+(-2)=f'_-(-2)\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=f(-2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x+b=\frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} \xrightarrow{x=-2} 2+b=\frac{-1}{3}\\ \frac{-1}{2}\times 4+(-2)b+c=\sqrt{5+4}=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=\frac{-7}{3}\\ -2b+c=5 \Rightarrow c=\frac{1}{3}\end{cases}$$

آهنگ تغییر و آهنگ متوسط:



شیب خط مماس بر تابع، تغییر آهنگ یا تغییر آنی، تغییرات لحظه‌ای، همگی یعنی مشتق تابع در نقطه‌ی داده شده .

$$\text{تغییر آهنگ} = \text{شیب خط مماس در نقطه‌ی } A(a,f(a)) \quad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=m$$

۱۳۹) تابع $f(x)$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+5x+4$ داده شده است.

الف) دستور کلی آهنگ متوسط تغییر این تابع را نسبت به متغیر x تعیین کنید.

ب) آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی $x=3$, $\Delta x=0/4$ را به دست آورید.

ج) آهنگ آنی را در $x=3$ به دست آورید.

☑پاسخ:

الف) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)+4-(x^2+5x+4)}{\Delta x}$

ب) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(3+0/4)^2+5(3+0/4)+4-((3)^2+5(3)+4)}{0/4}=\frac{1/2+0/16+2}{0/4}=\frac{3/36}{0/4}$

ج) $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x) \quad \Rightarrow \quad f'(3)=(x^2+5x+4)'_3=(2x+5)_3=11$

۱۴۰) اگر $f(t)=t^2+3t$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد ، نسبت آهنگ متوسط تغییر f در بازه ی زمانی $1\le t\le 1/2$ به آهنگ لحظه ای تغییر f در $t=1$ کدام ا ست ؟

☑پاسخ:

$$\frac{f(1/2)-f(1)}{1/2-1}=\frac{((1/2)^2+3(1/2))-(1+3)}{0/2}=\frac{10/4}{2}=5/2$$

$$f'(1)=(2t+3)_{x=1}=5 \quad \Rightarrow \quad \frac{5/2}{5}=1/04$$

۱۴۱) در چه نقطه ای از بازه $[9,25]$ آهنگ لحظه ای $f(x)=\sqrt{x}$ با آهنگ متوسط آن برابر است ؟

☑پاسخ:

$$\frac{f(25)-f(9)}{25-9}=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{9}}{16}=\frac{2}{16} \quad , \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{8}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x}=4 \quad \Rightarrow \quad x=16$$

۱۴۲) گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد میشود اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه ی $V_{(t)}=40\left(1-\frac{t}{100}\right)^2$ به دست می آید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه ای برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می شود ؟

☑پاسخ:

$$V'(t)=80\left(\frac{-1}{100}\right)\left(1-\frac{t}{100}\right)=\frac{-80}{100}\left(1-\frac{t}{100}\right)=\frac{-4}{100} \quad , \quad \frac{V(100)-V(0)}{100-0}=\frac{0-40}{100}=\frac{-4}{10}$$

حالا آهنگ تغییر رو مساوی تغییرات متوسط قرار می دیم

$$2-\frac{t}{50}=1 \quad \Rightarrow \quad t=50$$

۱۴۳) جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم . جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می گیریم . فرض کنید ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t)=-5t^2+40t$ به دست می آید . مطلوب است :

الف) سرعت متوسط در بازه $[1,2]$ ب) سرعت لحظه ای در زمان $t=3$

☑پاسخ:

الف) سرعت متوسط $=\frac{h(b)-h(a)}{b-a}=\frac{h(2)-h(1)}{2-1}=\frac{60-35}{1}=25$

ب) سرعت لحظه ای $=h'(t)=-10t+40 \quad \Rightarrow \quad h'(3)=10$

۱۴۴) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ نسبت به تغییر x روی بازه $[0,3]$ از آهنگ لحظه ای تابع در $x=\sqrt{2}$ چقدر کمتر ا ست ؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{9}$

☑پاسخ:

آهنگ متوسط تغییر $=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{16}}{3}=\frac{1}{3}$

اختلاف $=(\frac{1}{3})-(\frac{1}{3})=0$

آهنگ لحظه ای تغییر $=f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} \quad \Rightarrow \quad f'(\sqrt{2})=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2+16}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\frac{1}{3}$

۱۴۵)در تابع ای با ضابطه $f(t)=\frac{240}{t}$ آهنگ تغییر آنی در لحظه $t=4$ چقدر از آهنگ متوسط تغییر f از لحظه $t=3$ تا $t=5$ بیشتر ا ست

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

☑پاسخ: گزینه ۱

آهنگ متوسط تغییر $=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\frac{240}{5}-\frac{240}{3}}{5-3}=\frac{48-80}{2}=-16$

آهنگ آنی $=f'(x)=\frac{-240}{t^2} \quad \Rightarrow \quad f'(4)=\frac{-240}{(4)^2}=-15$

اختلاف $=(-15)-(-16)=1$

۱۴۶) در تابع با ضابطه‌ی $f(X)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در نقطه‌ی $x=1$ با نمو ۰/۴۴، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چه‌قدر کم‌تر است؟(خارج-۹۴)

۱) $\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$

☑ پاسخ :

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(1/44)-f(1)}{1/44-1} = \frac{\frac{0/44}{1/2}-0}{0/44} = \frac{5}{6}$$

$$\text{آهنگ لحظه ای} = f'(x) = \frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{x} \Rightarrow f'(1)=1$$

اختلاف این دو مقدار برابر است با: $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

۱۴۷) معادله حرکت متحرکی برابر $f(t)=t^2-4t+8$ می باشد a کدام باشد تا اختلاف سرعت متوسط متحرک روی بازه $[2,a]$ با سرعت لحظه ای در لحظه $t=5$ برابر ۲ کیلو متر بر ساعت باشد ؟

☑ پاسخ :

$$\text{آهنگ متوسط} \ \frac{f(a)-f(2)}{a-2} = \frac{(a^2-4a+8)-(4-8+8)}{a-2} = \frac{(a-2)^2}{a-2} = a-2$$

$$\text{آهنگ لحظه} \ f'(t)=2t-4 \xrightarrow{t=5} f'(5)=6 \Rightarrow \text{اختلاف سرعت ها} (a-2)-6=2 \Rightarrow a=10$$

۱۴۸) اگر خط مماس بر منحنی $y=x-\sqrt{x-1}$ در نقطه $x=a$ موازی با خط گذرنده بر دو نقطه به طول های ۲ و ۵ واقع بر منحنی باشد، مقدار a کدام است ؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $\frac{13}{4}$ ۴) $\frac{7}{4}$

☑ پاسخ :

آهنگ لحظه ای همان شیب خط مماس است $f'(a)=1-\frac{1}{2\sqrt{a-1}}$ $\Rightarrow$ $f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $\Rightarrow$ $f(x)=x-\sqrt{x-1}$

آهنگ متوسط همان شیب خط قاطع است $\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{2}{3}$ $\Leftarrow$ $f(5)=5-\sqrt{5-1}=3$, $f(2)=2-\sqrt{2-1}=1$

$$1-\frac{1}{2\sqrt{a-1}}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a-1}}=\frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{a-1}=\frac{3}{2} \Rightarrow a-1=\frac{9}{4} \Rightarrow a=\frac{13}{4}$$

۱۴۹)آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=(x^۲+۱)^۳(ax+۱)$ در بازه $[-۱,۰]$ برابر ۱۱ است ، آهنگ تغییر لحظه ای این تابع درنقطه $x=-۲a$ کدام است ؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) ۸ ۴) −۸ (تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

پاسخ : گزینه (۳)

$$\frac{f(۰)-f(-۱)}{۰-(-۱)}=۱-۸(۱-a)=۸a-۷=-۱۱ \Rightarrow a=\frac{-۱}{۲}$$

$$f'(x)=۶x(x^۲+۱)^۲(\frac{-۱}{۲}x+۱)+(\frac{-۱}{۲})(x^۲+۱)^۳ \Rightarrow f'(۱)=۱۲-۴=۸$$

۱۵۰) نقطه $M(x,y)$ روی منحنی به معادله $y=\sqrt{۳x+۷}$ در حرکت است . h فاصله نقطه M تا نقطه $(۱,۰)$ می باشد . آهنگ تغییر لحظه ای h در نقطه $x=۷$ کدام است ؟

۱) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۶}{۱۵}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

پاسخ گزینه : ۱

اول تابع مسئله را می سازیم که فاصله نقاط روی منحنی از مبداء است بعد از تابع حاصل مشتق می گیریم .

$$h=\sqrt{(x-۱)^۲+(\sqrt{۳x+۷})^۲}=\sqrt{x^۲-۲x+۱+۳x+۷}=\sqrt{x^۲+x+۸}$$

$$h'=\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^۲+x+۸}} \Rightarrow h'(۷)=\frac{۱۵}{۲\sqrt{۶۴}}=\frac{۱۵}{۱۶}$$


KIMIA MAHAN
متفاوت بودن را با ما تجربه کنید
کیمیای ماهان
در آکادمی
دهم
یازدهم
دوازدهم
تحلیل آزمون
آزمون
آموزش
مشاوره
kimiamahan.ir
۰۹۱۲۱۸۵۹۷۸۰