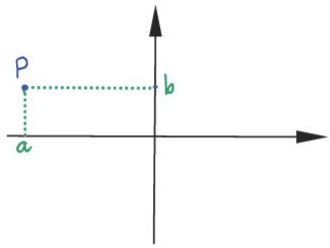
RIAZISARA

هندسه تحلیلی

پایه یازدهم – علوم تجربی و ریاضی‌فیزیک

تهیه و تنظیم: عزیز اسدی

۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲
www.riazisara.ir
@riazisara
@riazisara.ir



یادآوری:

در سال‌های گذشته با دستگاه محورهای مختصات آشنا شدید.
محورهای مختصات صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند، که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود؛ نقاط روی محورها در هیچ ربعی قرار ندارند.
هر نقطه مانند P به یک زوج مرتب مانند (a,b) نظیر می‌شود، که آن را مختصات نقطهٔ P می‌نامند. طول نقطهٔ P را با x_P و عرض آن را با y_P نمایش می‌دهند.

فاصلهٔ دو نقطهٔ هم عرض:

فاصلهٔ دو نقطهٔ هم عرض $A(x_A, k)$ و $B(x_B, k)$ برابر است با $|x_B - x_A|$.

فاصلهٔ دو نقطهٔ هم طول:

فاصلهٔ دو نقطهٔ هم طول $A(k, y_A)$ و $B(k, y_B)$ برابر است با $|y_B - y_A|$.

مثال

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(2,-3)$ و $B(-3,-3)$ را حساب کنید.

حل:

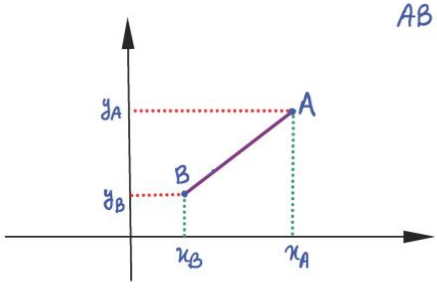
$$AB = |-4-2| = 6$$

مثال

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(-2,1)$ و $B(5,1)$ را حساب کنید.

حل:

$$AB = |5-(-2)| = 7$$



نکته

فاصلهٔ دو نقطه در حالت کلی:

به کمک رابطهٔ فیثاغورث می‌توان نشان داد که فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ (طول پاره‌خط AB) برابر است با

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

مثال

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(-۳,۵)$ و $B(۱,۲)$ را بیابید.

حل:

$$AB=\sqrt{(۱-(-۳))^۲+(۲-۵)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

مثال

نقاط $A(۲,-۱)$ و $B(۰,۳)$ دو سر قطری از یک دایره هستند. مساحت دایره را بدست آورید.

حل:

$$AB=\sqrt{(۰-۲)^۲+(۳+۱)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

$$۲R=۲\sqrt{۵}\longrightarrow R=\sqrt{۵}\qquad\Longrightarrow S=\pi R^۲=\pi(\sqrt{۵})^۲\Longrightarrow S=۵\pi$$

مثال

اگر $A(k+۱,۴)$ و $B(۳,۵)$ دو سر پاره‌خطی به طول ۶ واحد باشند، مقادیر ممکن k را بیابید.

حل:

$$AB=۶\Rightarrow\sqrt{(k+۱-۳)^۲+(۴-۵)^۲}=۶\longrightarrow\sqrt{(k-۲)^۲+۱}=۶\longrightarrow(k-۱)^۲+۱=۳۶$$

$$\longrightarrow(k-۱)^۲=۳۵\longrightarrow\begin{cases}k-۱=\sqrt{۳۵}\\k-۱=-\sqrt{۳۵}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}k=۱+\sqrt{۳۵}\\k=۱-\sqrt{۳۵}\end{cases}$$

مثال

مختصات نقطه‌ای روی محور طول‌ها را طوری تعیین کنید که از دو نقطهٔ $A(۱,۲)$ و $B(۶,-۴)$ به یک فاصله باشند.

حل:

چون نقطهٔ مورد نظر روی محور xها قرار دارد، پس عرض آن صفر است و مختصات آن به صورت $C(a,۰)$ می‌باشد.

$$AC=BC\longrightarrow\sqrt{(a-۱)^۲+(۰-۲)^۲}=\sqrt{(a-۶)^۲+(۰+۴)^۲}\longrightarrow\sqrt{a^۲-۲a+۵}=\sqrt{a^۲-۱۲a+۵۲}$$

$$\longrightarrow a^۲-۲a+۵=a^۲-۱۲a+۵۲\longrightarrow ۱۰a=۴۷\longrightarrow a=۴,۷\qquad\Longrightarrow C(۴,۷,۰)$$

نکته

مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

اگر $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ دو سر پاره‌خط AB و M نقطهٔ وسط AB باشد، مختصات نقطهٔ M به صورت $M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})$ است.

مثال

نقاط $A(۲,-۳)$ و $B(۴,۱)$ دو سر قطر یک دایره هستند. مختصات مرکز دایره را بنویسید.

$$x_O = \frac{۴+۲}{۲} = ۳ \qquad y_O = \frac{۱+(-۳)}{۲} = -۱ \longrightarrow O(۳,-۱)$$

مرکز دایره O: $(۳,-۱)$

مثال

نقطهٔ $B(۲,-۳)$ وسط پاره‌خط AC است. اگر مختصات A به صورت $A(۱,۵)$ باشد، مختصات نقطهٔ C را بیابید.

حل:

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{۲} \longrightarrow ۲ = \frac{۱+x_C}{۲} \longrightarrow x_C = ۳$$

$$y_B = \frac{y_A + y_C}{۲} \longrightarrow -۳ = \frac{۵+y_C}{۲} \longrightarrow y_C = -۱۱$$

$$\longrightarrow C(۳,-۱۱)$$

مثال

نقاط $A(۲,۰)$، $B(-۴,۹)$ و $C(-۲,-۱)$، سه رأس یک مثلث هستند. طول میانهٔ نظیر رأس C را بیابید.

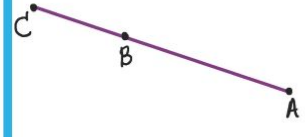
حل: فرض کنید M وسط ضلع AB باشد،

$$x_M = \frac{-۴+۲}{۲} = -۱ \qquad y_M = \frac{۹+۰}{۲} = ۴ \longrightarrow M(-۱,۴)$$

$$CM = \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۴+۲)^۲} = \sqrt{۴+۲۵} = \sqrt{۲۹}$$

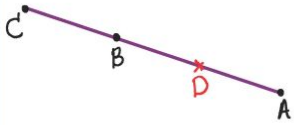
مثال

در شکل مقابل، فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,-۷)$ از نقطهٔ $B(-۴,۴)$ دو برابر فاصلهٔ نقطهٔ B تا C است. مختصات نقطهٔ C را بیابید.



حل: فرض کنید نقطهٔ D وسط پاره‌خط AB باشد، در این صورت نقطهٔ B نیز وسط پاره‌خط DC است. (چرا؟)

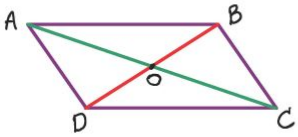
بنابراین



مختصات نقطه D: $x_D=\frac{-۴+۲}{۲}=-۱$ ، $y_D=\frac{۳+(-۷)}{۲}=-۲$ $\longrightarrow D(-۱،-۲)$

مختصات نقطه C: $x_B=\frac{x_C+x_D}{۲}\longrightarrow -۴=\frac{x_C+(-۱)}{۲}\longrightarrow x_C=-۷$ ، $y_B=\frac{y_C+y_D}{۲}\longrightarrow ۳=\frac{y_C+(-۲)}{۲}\longrightarrow y_D=۸$ $\longrightarrow C(-۷،۸)$

نکته



در هر متوازی الاضلاع مانند ABCD قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

بنابراین وسط دو قطر AC و BD بر هم منطبق اند؛ بنابراین

$$x_A+x_C=x_B+x_D \quad , \quad y_A+y_C=y_B+y_D$$

مثال

نقاط $A(-۱،-۳)$ ، $B(۰،۴)$ ، $C(-۵،۵)$ و $D(a،b)$ رئوس متوازی الاضلاع ABCD هستند.

مقادیر a و b را بیابید.

حل:

$x_A+x_C=x_B+x_D\longrightarrow (-۱)+(-۵)=۰+a\longrightarrow a=-۶$

$y_A+y_C=y_B+y_D\longrightarrow (-۳)+(۵)=۴+b\longrightarrow b=-۲$

نکته (یادآوری)

* شیب خطی که از نقاط $A(x_۱،y_۱)$ و $B(x_۲،y_۲)$ عبور می‌کند، برابر است با $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$.
* معادله خط با شیب m که از نقطه $A(x_۱،y_۱)$ عبور می‌کند به صورت $y-y_۱=m(x-x_۱)$ است.
* معادله خطی که با محور y ها موازی نیست به صورت $y=mx+n$ است، که در آن m شیب خط و n عرض از مبدا خط نامیده می‌شود.

* معادله خط $y=mx+n$ را می‌توان به صورت $ax+by+c=0$ نیز نوشت، که در آن a و b هر دو صفر نیستند.

- اگر $a=0$ باشد، خط موازی محور xها است. (شیب صفر است)
- اگر $b=0$ باشد، خط موازی محور yها است. (شیب تعریف نشده است)
- اگر $c=0$ باشد، خط از مبداء مختصات عبور می‌کند. (عرض از مبداء صفر است)
- اگر $a\neq 0$ و $b\neq 0$ باشد، شیب خط است $-\frac{a}{b}$.

* دو خط غیر موازی با محور yها، به معادلات $y=mx+n$ و $y=m'x+n'$ با هم موازی‌اند، اگر و فقط اگر $m=m'$.

* دو خط غیر موازی با محور yها، به معادلات $y=mx+n$ و $y=m'x+n'$ بر هم عمودند، اگر و فقط اگر $m=\frac{-1}{m'}$ $(mm'=-1)$.

* دو خط $x=k$ و $y=k'$ در نقطه (k,k') بر هم عمودند.

نکته

دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$،

الف) با هم موازی‌اند اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

ب) بر هم منطبق‌اند اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

ج) متقاطع‌اند اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

د) بر هم عمودند اگر $aa'+bb'=0$

عزیز اسدی ریاضی سرا

مثال

مقدار m را طوری تعیین کنید که خطوط $3mx+2y=5$ و $y=2-4x$

الف) بر هم عمود باشند. ب) با هم موازی باشند.

$$\begin{cases} 3mx+2y=5 \longrightarrow \text{شیب} = \frac{-3m}{2} \\ y=2-4x \longrightarrow \text{شیب} = -4 \end{cases}$$

الف) $(-\frac{3m}{2})(-4)=1 \longrightarrow m=\frac{1}{6}$

ب) $\frac{-3m}{2}=-4 \longrightarrow m=\frac{8}{3}$

تمرین

وضعیت هر جفت از خط‌های زیر را مشخص کنید.

① $\begin{cases} l_1: 2x+3y=4 \\ l_2: 4x+6y=5 \end{cases}$ ② $\begin{cases} l_3: 3x-5y=1 \\ l_4: -6x+10y=-2 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} l_5: y=2x-1 \\ l_6: 6x-2y-3=0 \end{cases}$

④ $\begin{cases} l_7: 3x+2y=1 \\ l_8: y=\frac{2}{3}x \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} l_9: -\frac{2}{3}x+y=2 \\ l_{10}: 3x+y=1 \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} l_{11}: x=-3 \\ l_{12}: y=2 \end{cases}$

تمرین

معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $2x+3y=2$ و $y=x+3$ بگذرد و بر خط $x-3y+1=0$ عمود باشد.

تمرین

اگر $A(-3,5)$ و $B(1,-1)$ دو سر پاره‌خط AB باشند، معادله عمود منصف پاره‌خط AB را بنویسید.

تمرین

نقاط $A(-2,-2)$، $B(4,2)$، $C(0,2)$ سه رأس مثلث ABC هستند.

الف) مختصات وسط اضلاع مثلث ABC را بیابید. ب) مختصات نقطهٔ G (محل برخورد میانه‌های مثلث) را بیابید.

مثال

نقاط $A(-1,2)$ ، $B(3,4)$ و $C(-1,5)$ ، سه رأس یک مثلث هستند؛ مطلوب است :

الف) معادله خطی که ارتفاع وارد بر ضلع AB روی آن است. (خط شامل CH)

ب) مختصات پای عمود CH

ج) اندازه ارتفاع CH

د) مساحت مثلث ABC را بیابید.

حل :

الف) $m_{AB}=\frac{4-2}{3+1}=\frac{1}{2} \longrightarrow m_{CH}=-2 \longrightarrow y-5=-2(x+1) \longrightarrow y=-2x+3$

ب) معادله خط شامل AB : $y-4=\frac{1}{2}(x-3) \longrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

$$\begin{cases} y=-2x+3 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \end{cases} \Longrightarrow -2x+3=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \longrightarrow -\frac{5}{2}x=-\frac{1}{2} \longrightarrow x=\frac{1}{5} \longrightarrow y=\frac{13}{5}$$

بنابراین مختصات نقطه H به صورت $H(\frac{1}{5},\frac{13}{5})$ است.

ج) $CH=\sqrt{(-1-\frac{1}{5})^2+(5-\frac{13}{5})^2}=\sqrt{\frac{36}{25}+\frac{144}{25}}=\sqrt{\frac{180}{25}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

د) طول قاعده AB : $AB=\sqrt{(3+1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

مساحت مثلث : $S=\frac{(AB)\cdot(CH)}{2}=\frac{2\sqrt{5}\times\frac{6\sqrt{5}}{5}}{2}=6$

نکته

فاصله نقطه $A(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال

فاصلهٔ نقطهٔ $M(1,-4)$ از خط $-3x+4y+1=0$ را بیابید.

حل:

$$d=\frac{|-3(1)+4(-4)+1|}{\sqrt{(-3)^2+(4)^2}}=\frac{18}{5}=3.6$$

مثال

فاصلهٔ نقطهٔ $A(-2,1)$ از خط $y=\frac{2}{3}x+1$ را بیابید.

حل:

$$y=\frac{2}{3}x+1 \longrightarrow \frac{2}{3}x-y+1=0 \xrightarrow{\times 3} 2x-3y+3=0$$

$$d=\frac{|2(1)-3(-2)+3|}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2}}=\frac{11}{\sqrt{13}}=\frac{11\sqrt{13}}{13}$$

مثال

طول پاره‌خطی که از نقطهٔ $A(2,k)$ بر خط $y=\frac{2k}{3}x-\frac{4}{3}$ عمود می‌شود، برابر $\frac{1}{2}$ است. مقدار k را بیابید.

حل:

طول پاره‌خط عمود بر خط از یک نقطه از صفحه برابر فاصلهٔ آن نقطه از خط مورد نظر است.

$$d=\frac{2k}{3}x-\frac{4}{3} \longrightarrow 2kx-3y-4=0$$

$$d=2 \longrightarrow \frac{|2k(2)-3(k)-4|}{\sqrt{(2k)^2+(-3)^2}}=\frac{|k-4|}{\sqrt{4k^2+9}}=\frac{1}{2}$$

$$2|k-4|=\sqrt{4k^2+9} \longrightarrow 4(k^2-8k+16)=4k^2+9 \longrightarrow -32k+64=9 \longrightarrow k=\frac{55}{32}$$

مثال

نقاط $A(-1,2)$، $B(3,4)$ و $C(-1,5)$، سه رأس یک مثلث هستند. اندازهٔ ارتفاع CH را بیابید.

حل:

معادلهٔ خط شامل AB:

$$y-4=\frac{4-2}{3+1}(x-3) \longrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

$$\longrightarrow x-2y+5=0 \Longrightarrow d=\frac{|(-1)-2(5)+5|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

عزیز اسدی – ریاضی سرا

مثال

در ضلع مستطیلی بر دو خط $3x-4y-2=0$ و $4x+3y-11=0$ واقع اند. اگر یکی از رأس های مستطیل نقطهٔ $A(-1,2)$ باشد، مساحت مستطیل را به دست آورید.

حل:

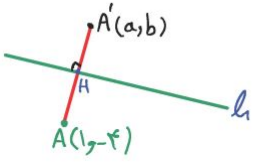
دو خط داده شده بر هم عمودند (چرا؟) بنابراین دو ضلع متوالی مستطیل روی این دو خط قرار دارند. برای پیدا کردن طول و عرض مستطیل، کافی است فاصلهٔ $A(-1,2)$ را از دو خط داده شده حساب کنیم.

$$d_1=\frac{|3(-1)-4(2)-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{13}{5} \quad , \quad d_2=\frac{|4(-1)+3(2)-11|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow S=\frac{13}{5}\times\frac{9}{5}=\frac{117}{25}$$

مثال

قرینهٔ نقطهٔ $A(-4,1)$ نسبت به خط $x+2y-3=0$ را بیابید.



حل:

فرض کنیم نقطهٔ مورد نظر $A'(a,b)$ باشد.

معادلهٔ خط عمود بر $l_1: x+2y-3=0$ و گذرنده از نقطهٔ A به صورت زیر است:

$$y+4=+2(x+1) \rightarrow y=2x-6 \quad (l_2)$$

نقطهٔ برخورد دو خط عمود بر هم l_1 و l_2 (نقطهٔ H) وسط پارهٔ خط AA' است.

$$\begin{cases} x+2y-3=0 \\ y=2x-6 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow H(3,0)$$

$$\begin{cases} 3=\frac{a+1}{2} \rightarrow a=5 \\ 0=\frac{-4+b}{2} \rightarrow b=4 \end{cases} \rightarrow A'(5,4)$$ مختصات نقطهٔ A':

مثال

فاصلهٔ دو خط موازی $l_1: y=2x-1$ و $l_2: 4x-2y+3=0$ را بیابید.

حل:

کافی است نقطهٔ دلخواهی روی یکی از خطوط، (مثلاً l_1) را از خط دیگر (l_2) حساب کنیم.

نقطهٔ (۰و۱-) روی خط l_1 قرار دارد.

$$d=\frac{|۴(۰)-۲(-۱)+۳|}{\sqrt{۴^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۲۰}}$$

نکته

در حالت کلی فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

تذکر: برای استفاده از این فرمول، حتماً باید ضرائب a و b در معادلات دو خط موازی، یکسان باشد؛ در غیر این صورت باید ضرائب a و b در معادلات دو خط را با ضرب اعداد مناسب در معادلات، یکسان نمود.

مثال (حل مثال قبل)

فاصلهٔ دو خط موازی $l_1: y=۲x-۱$ و $l_2: ۴x-۲y+۳=۰$ را بیابید.

حل:

$$l_1: y=۲x-۱ \longrightarrow ۲x-y-۱=۰ \xrightarrow{\times ۲} ۴x-۲y-۲=۰$$

$$l_2: ۴x-۲y+۳=۰$$

$$\Rightarrow d=\frac{|۳-(-۲)|}{\sqrt{۴^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۲۰}}$$

مثال

در مربع مربعی روی دو خط $۳x-۵y+۱=۰$ و $-۶x+۱۰y+۷=۰$ قرار دارند. مساحت این مربع را بیابید.

حل:

شیب دو خط داده شده با هم برابرند، بنابراین دو خط موازی‌اند. فاصلهٔ دو خط داده شده اندازهٔ ضلع مربعات.

$$۳x-۵y+۱=۰ \xrightarrow{\times ۲} ۶x-۱۰y+۲=۰$$

$$-۶x+۱۰y+۷=۰ \xrightarrow{\times(-۱)} ۶x-۱۰y-۷=۰$$

$$d=\frac{|۲-(-۷)|}{\sqrt{۶^۲+(-۱۰)^۲}}=\frac{۹}{\sqrt{۱۳۶}} \Longrightarrow S=\left(\frac{۹}{\sqrt{۱۳۶}}\right)^۲=\frac{۸۱}{۱۳۶}$$

عزیز اسدی ریاضی سرا

مثال

مقادیر a و c را طوری تعیین کنید که فاصلهٔ دو خط موازی $3x+by+1=0$ و $6x-4y+c=0$ برابر $\sqrt{13}$ باشد.

حل:

معادلهٔ خط اول را به صورت $6x+2by+2=0$ بازنویسی می‌کنیم.

چون دو خط موازی‌اند، پس $2b=-4$ و بنابراین $b=-2$

$$d=\sqrt{13} \longrightarrow \frac{|c-2|}{\sqrt{6^2+(-4)^2}}=\sqrt{13} \Rightarrow \frac{|c-2|}{\sqrt{52}}=\sqrt{13} \longrightarrow |c-2|=\sqrt{676}=26$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c-2=26 \longrightarrow c=28 \\ c-2=-26 \longrightarrow c=-24 \end{cases}$$

عزیز اسدی ریاضی سرا