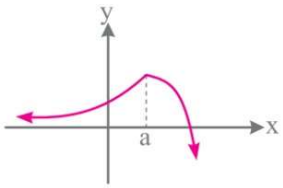
gajmarket.com خرید آنلاین در

علامت f'' در بازهٔ $(-\infty , ۲)$ منفی (پس تقعر تابع f در این بازه رو به پایین) و در بازهٔ $(۲ , +\infty)$ مثبت (پس تقعر تابع f در این بازه رو به بالا) است. پس $x = ۲$ نقطهٔ عطف تابع f است. تنها نموداری که در آن، نقطهٔ عطف $x = ۲$ است و در سمت چپ این نقطه تقعر به سمت پایین و در سمت راست آن تقعر به سمت بالا است، نمودار قسمت (پ) است.

تمرین

صفحهٔ ۱۳۶ کتاب درسی

۱) نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطهٔ عطف نباشد.



دقت داشته باشید که در نقطهٔ عطف، باید خط مماس وجود داشته باشد. در صورتی که در نقطهٔ $x = a$ خط مماس وجود ندارد، پس $x = a$ نقطهٔ عطف نیست.

۲) جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ آنها بررسی کرده و نقطهٔ عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ - ۳x + ۴$

$$f'(x) = x^۲ - ۲x - ۳ \Rightarrow f''(x) = ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. بنابراین در همهٔ نقاط دامنه‌اش، خط مماس وجود دارد.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f''		−	۰	+	
f	$-\infty$	∩	$-\frac{۱}{۳}$	∪	$+\infty$

با توجه به جدول، $x = ۱$ نقطهٔ عطف تابع است زیرا اولاً $x = ۱ \in D_f$، ثانیاً در این نقطه خط مماس بر نمودار تابع f وجود دارد و ثالثاً جهت تقعر تابع f در دو طرف آن عوض می‌شود.

ب) $f(x) = \frac{x+۱}{x-۱}$

$$f'(x) = \frac{(۱)(x-۱) - (۱)(x+۱)}{(x-۱)^۲} = \frac{-۲}{(x-۱)^۲} \Rightarrow f''(x) = \frac{(۰)(x-۱)^۲ - ۲(x-۱)(-۲)}{(x-۱)^۴} = \frac{۴}{(x-۱)^۳}$$

تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش $(\mathbb{R} - \{۱\})$ مشتق‌پذیر است. بنابراین در همهٔ نقاط دامنه‌اش، خط مماس وجود دارد.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f''		−	∄	+	
f	۱	∩	∄	∪	۱

با توجه به جدول، تنها نقطه‌ای که در اطراف آن جهت تقعر تابع f عوض می‌شود $x = ۱$ است ولی چون $x = ۱ \notin D_f$ پس $x = ۱$ نقطهٔ عطف نیست.

@cipbooks قبل از استفاده حتما در کانال تلگرامی ما عضو شوید

خرید آنلاین در gajmarket.com

تمرین

صفحهٔ ۱۲۵ و ۱۲۶ کتاب درسی

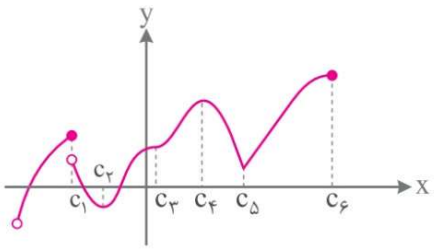
۱ نمودار تابعی را رسم کنید که همهٔ شرایط زیر را داشته باشد.

نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن برابر صفر باشد.

نقطهٔ مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد.

نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد.

نقطه‌ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.



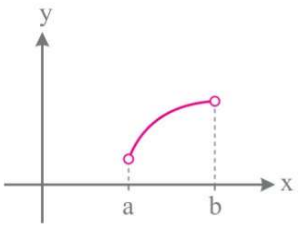
تابع در c_4 دارای ماکزیمم نسبی است و مشتق در آن، برابر صفر است.

تابع در c_5 دارای مینیمم نسبی است و تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق تابع در آن موجود نیست.

تابع در c_1 ماکزیمم نسبی دارد اما در آن ناپیوسته است.

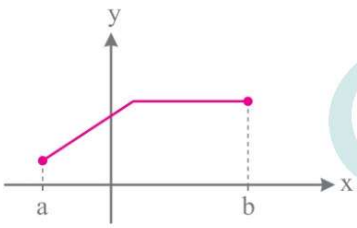
مشتق تابع در c_3 برابر صفر است اما c_3 اکسترمم نسبی تابع نیست.

۲ نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه‌اش پیوسته باشد ولی بر آن ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

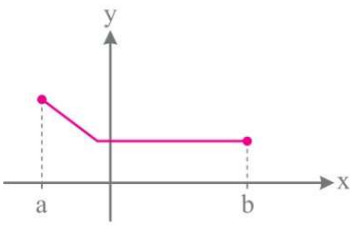


۳ برای هر مورد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

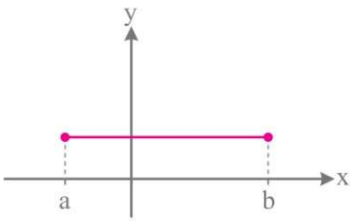
الف) تابع f در بازه‌ای مانند [a , b] صعودی است اما صعودی اکید نیست.



ب) تابع f در بازه‌ای مانند [a , b] نزولی است اما نزولی اکید نیست.



پ) تابع f در بازه‌ای مانند [a , b] هم صعودی و هم نزولی است.

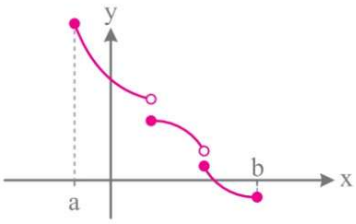


@cipbooks
فصل از اسکاله حتما در کانال سی آپی بوکز عضو شوید

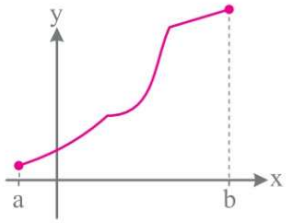
خرید آنلاین در gajmarket.com

۴) برای هر کدام از موارد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی است اما در برخی نقاط آن بازه پیوسته نیست.

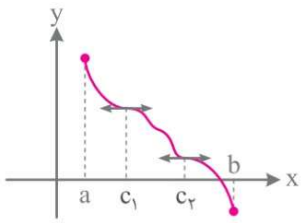


ب) تابعی که در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن بازه پیوسته است اما در برخی نقاط آن بازه مشتق‌پذیر نیست.



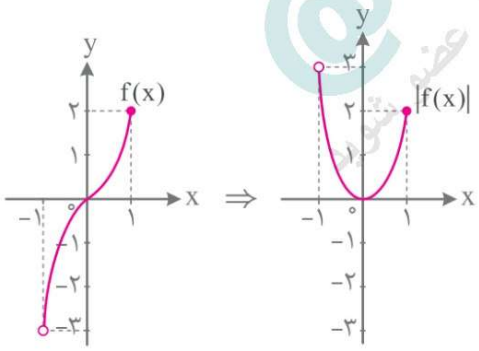
پ) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق‌پذیر است اما مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.

تابع روبه‌رو اکیداً نزولی است ولی مشتق آن در نقاط c_1 و c_2 صفر است (منفی نیست).



۵) نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

تابع f در $x=1$ دارای ماکزیمم مطلق است، اما تابع $|f|$ فاقد ماکزیمم مطلق است.



۶) نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده‌شده در صورت وجود بیابید.

الف) $f(x)=3x^2-2x+5 \quad [-2,1]$

تابع f چندجمله‌ای است، بنابراین در هر نقطه از دامنه‌اش همواره مشتق‌پذیر است، پس کافی است ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ را به دست آوریم.

$$f'(x)=6x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

$$f(-2)=12+4+5=21$$

خرید آنلاین در gajmarket.com

x	-۲		$\frac{۱}{۳}$		۱
f'		$-$	۰	$+$	
f	۲۱	نزولی اکید	min نسبی $\frac{۱۴}{۳}$	صعودی اکید	۶

$f(\frac{۱}{۳}) = \frac{۱}{۳} - \frac{۲}{۳} + ۵ = \frac{۱۴}{۳}$

$f(۱) = ۳ - ۲ + ۵ = ۶$

با توجه به جدول، نقطهٔ $(\frac{۱}{۳}, \frac{۱۴}{۳})$ نقطهٔ min نسبی و min مطلق تابع f و نقطهٔ $(-۲, ۲۱)$ نقطهٔ max مطلق تابع f است. توجه کنید که تابع f در این بازه max نسبی ندارد.

ب) $f(x) = x^۳ - ۳x \qquad [-۱, ۲]$

تابع f چندجمله‌ای است، بنابراین در هر نقطه از دامنه‌اش همواره مشتق‌پذیر است. پس کافی است ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را به دست آوریم.

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۱ \end{cases}$$

x	-۱		۱		۲
f'	۰	$-$	۰	$+$	
f	۲	نزولی اکید	min نسبی -۲	صعودی اکید	۲

$f(-۱) = -۱ + ۳ = ۲$

$f(۲) = ۸ - ۶ = ۲$

$f(۱) = ۱ - ۳ = -۲$

با توجه به جدول، نقطهٔ $(-۲, ۱)$ نقطهٔ min نسبی و min مطلق تابع f و نقطه‌های $(-۱, ۲)$ و $(۲, ۲)$ نقطهٔ max مطلق تابع f هستند. توجه کنید که تابع f در این بازه max نسبی ندارد.

پ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ۰ \le x < ۲ \\ ۴ - x & x \ge ۲ \end{cases}$

دامنهٔ تابع f بازهٔ $[۰, +\infty)$ است و در $x = ۲$ داریم:

تابع f در $x = ۲$ مشتق‌پذیر نیست. $\Rightarrow$ تابع f در $x = ۲$ حد ندارد. $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = ۲ \;,\; \lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = \sqrt{۲}$

همان‌طور که دیده می‌شود تابع $f'(x)$ در هیچ نقطه‌ای از دامنه‌اش صفر نمی‌شود. بنابراین داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲\sqrt{x}} & ۰ < x < ۲ \\ -۱ & x > ۲ \end{cases}$$

x	۰		۲		$+\infty$
f'	ت ن	$+$	ت ن	$-$	
f	۰	صعودی اکید	max نسبی ۲	نزولی اکید	$-\infty$

$f(۰) = ۰$

$f(۲) = ۲$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

با توجه به جدول، نقطهٔ $(۲, ۲)$ نقطهٔ max نسبی و max مطلق تابع f است. (توجه کنید تابع در یک همسایگی ۲ که شامل $x = ۲$ است، تعریف شده است.) دقت کنید که تابع f در دامنهٔ خود، فاقد min نسبی و min مطلق است.

@cpbooks قبل از استفاده حتما در کانال سی‌پی‌بوکز عضو شوید

خرید آنلاین در gajmarket.com

۷) ضرایب a و b را در تابع $f(x)=x^۳+ax+b$ طوری پیدا کنید که در نقطه (۲ , ۱) ، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

دقت کنید که اگر نقطهٔ (a , b) اکسترمم نسبی تابع f باشد و f در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f(a)=b$ و $f'(a)=۰$ است. بنابراین:

$$f(۱)=۲ \Rightarrow ۱+a+b=۲ \Rightarrow a+b=۱ \qquad (۱)$$

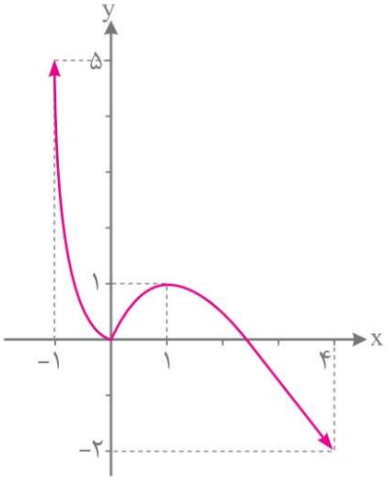
تابع f چند جمله‌ای است، پس در هر نقطه از دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. چون تابع f در نقطهٔ $x=۱$ ماکزیمم نسبی دارد، پس $f'(۱)=۰$. بنابراین:

$$f'(x)=۳x^۲+a \xrightarrow{f'(۱)=۰} f'(۱)=۳+a=۰ \Rightarrow a=-۳ \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} b=۴$$

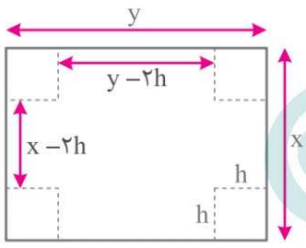
۸) نمودار تابعی مانند f را به گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند.

$$f(۰)=۰ \quad , \quad f(۴)=-۲ \quad , \quad f(-۱)=۵$$

نقطهٔ (۱ , ۱) ماکزیمم نسبی این تابع باشد.



۹) یک برگه کاغذی مستطیل‌شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $xy=۱۰۰cm^۲$ و $h=۲cm$ ، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار ممکن شود.



$$V=(x-۲h)(y-۲h)h=(xy-۲hx-۲hy+۴h^۲)h \xrightarrow[xy=۱۰۰ \Rightarrow y=\frac{۱۰۰}{x}]{h=۲} V(x)=(۱۰۰-۴x-۴(\frac{۱۰۰}{x})+۱۶)۲$$

$$\Rightarrow V(x)=۲۳۲-۸x-\frac{۸۰۰}{x}$$

دقت کنید دامنهٔ تابع $V(x)$ به صورت زیر پیدا می‌شود.

$$x-۲h \geq ۰ \xrightarrow{h=۲} x-۴ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۴ \qquad (۱)$$

$$y-۲h \geq ۰ \xrightarrow{h=۲} y-۴ \geq ۰ \Rightarrow y \geq ۴ \xrightarrow{y=\frac{۱۰۰}{x}} \frac{۱۰۰}{x} \geq ۴ \Rightarrow x \leq ۲۵ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱) \cap (۲)} ۴ \leq x \leq ۲۵$$

بنابراین باید مقدار ماکزیمم مطلق تابع $V(x)=۲۳۲-۸x-\frac{۸۰۰}{x}$ را در بازهٔ $[۴ , ۲۵]$ پیدا کنیم. داریم:

$$V'(x)=۰-۸+\frac{۸۰۰}{x^۲} \xrightarrow{V'(x)=۰} \frac{-۸x^۲+۸۰۰}{x^۲}=۰ \Rightarrow -۸x^۲=-۸۰۰ \Rightarrow x^۲=۱۰۰ \Rightarrow x=۱۰$$

@cipbooks قبل از استفاده حتما در کتابخانه‌ی آی پی بوکز عضو شوید

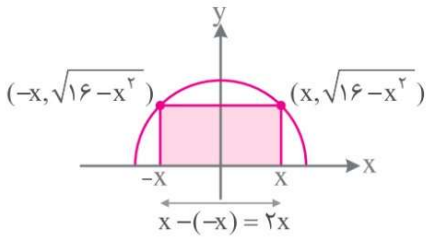
اما: $V(۴)=۰\ ,\ V(۲۵)=۰\ ,\ V(۱۰)=۷۲$

بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق تابع V در بازهٔ $[۴\ ,\ ۲۵]$، برابر ۷۲ است. پس حجم این مکعب مستطیل زمانی بیشترین مقدار ممکن می‌شود که:

$$x=۱۰\xrightarrow{y=\frac{۱۰۰}{x}}y=۱۰$$

۱۰ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

فرض می‌کنیم مرکز دایره مبدأ مختصات و نیم دایره بالای محور xها $(y\geq ۰)$ باشد. در این صورت:



معادلهٔ دایره: $x^۲+y^۲=۱۶\Rightarrow y=\sqrt{۱۶-x^۲}$

با توجه به شکل، برای $x\geq ۰$ مساحت مستطیل مورد نظر برابر است با: $S(x)=۲x(\sqrt{۱۶-x^۲})$

دقت کنید دامنهٔ تابع $S(x)$ به این صورت به دست می‌آید: $۱۶-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۱۶\xrightarrow{x\geq ۰}۰\leq x\leq ۴$

بنابراین باید مقدار ماکزیمم مطلق تابع $S(x)=۲x\sqrt{۱۶-x^۲}$ را در بازهٔ $[۰\ ,\ ۴]$ پیدا کنیم. داریم:

$$S'(x)=۲\sqrt{۱۶-x^۲}+\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱۶-x^۲}}(۲x)=۲\sqrt{۱۶-x^۲}-\frac{۲x^۲}{\sqrt{۱۶-x^۲}}=\frac{۲(۱۶-x^۲)-۲x^۲}{\sqrt{۱۶-x^۲}}=\frac{۳۲-۴x^۲}{\sqrt{۱۶-x^۲}}$$

$$S'(x)=۰\Rightarrow ۳۲-۴x^۲=۰\Rightarrow x^۲=۸\xrightarrow{x\geq ۰}x=۲\sqrt{۲}$$

اما: $S(۰)=۰\ ,\ S(۲\sqrt{۲})=۱۶\ ,\ S(۴)=۰$

بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق تابع S در بازهٔ $[۰\ ,\ ۴]$، برابر ۱۶ است. پس مساحت این مستطیل زمانی بیشترین مقدار ممکن است که:

$$x=۲\sqrt{۲}\xrightarrow{y=\sqrt{۱۶-x^۲}}y=۲\sqrt{۲}$$

۱۱ توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟

کافی است $f'(x)$ را تعیین علامت کنیم.

الف) $\mathbf{f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۷}$

$$f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲=۰\Rightarrow ۶(x^۲-x-۲)=۰\Rightarrow ۶(x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=-۱\ \text{یا}\ x=۲$$

@clpbooks قبل از استفاده و تکثیر در کانال‌های آی پی بوکز عضو شوید
gajmarket.com خرید آنلاین در