مثال۱۰.الف) PH هر یک از محلول های زیر را به دست آورید:

۱)در آب پرتقال غلظت یون هیدرونیوم $[H_3O^+]$ برابر $2/9 \times 10^{-2}$ مول بر لیتر است.

$(log29 \cong 1/39$)در شربت معده غلظت یون هیدرونیوم برابر $2/5 \times 10^{-11}$ مول بر لیتر است.

$(log25 \cong 1/39$

۳)در آب خالص غلظت یون هیدرونیوم برابر 1×10^{-7} مول بر لیتر است.

اسیدی $PH < v$, بازی $PH > v$, خنثی $PH = v$



فصل ششم

حد و پیوستگی

۱- مفهوم حد و حدهای یکطرفه ۲- همسایگی و قضایای حد ۳- اعمال جبری روی حد ۴- رفع ابهام صفر صفرم ۵- پیوستگی در یک نقطه و پیوستگی در یک بازه

در این فصل با موضوع‌های زیر آشنا شده و به بررسی آنها می پردازیم.

1)مفهوم و فرایندهای حدی(به کمک رسم نمودار و مسائل مفهومی و همسایگی یک نقطه)

2) حدهای یک طرفه : (حد چپ و راست) 3) قضایای حد: (به کمک حدگیری می آیند)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

4) محاسبه حد توابع کسری: (رفع ابهام÷) 5) پیوستگی: (در یک نقطه و در یک بازه)

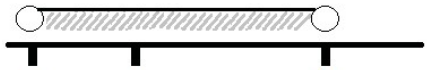
۱. مفهوم حد

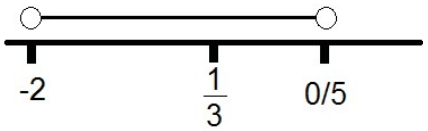
برای پی بردن به مساحت دایره از مفهوم کمک گرفته شده است بدین صورت که:

تعداد اضلاع زیاد شود	مساحت شش ضلعی	مساحت مثلث متساوی الاضلاع
مساحت به دایره نزدیک تر می شود	$a^2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

تعریف همسایگی:

اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌گوییم. به لحاظ شهودی یعنی :





$\frac{1}{3} \in \left(-2, \frac{0}{5}\right)$ یک همسایگی $\frac{1}{3}$ است.(۰/۵ و ۲-)

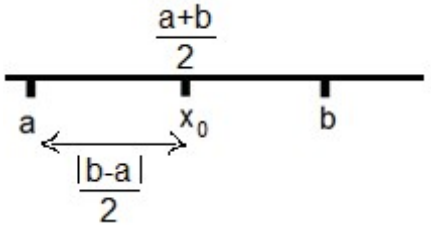
$x_0 \in (a, b)$ یک همسایگی x_0 است هرگاه (a,b)

الف) اگر x_0 را از بازه حذف کنیم ؛ مجموعه (a,b)-{x_0} را همسایگی محذوف x_0 می نامیم.

ب) اگر x_0 وسط بازه ی (a,b) باشد ، همسایگی متقارن x_0 نامیده می شود و می توان نوشت:

$$x_0 \epsilon (a,b) \Longrightarrow x_0 \text{ همسایگی متقارن } (a,b) \rightarrow \{x \mid \left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{|b-a|}{2}\}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

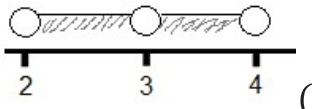


مرکز همسایگی $= \delta = \frac{a+b}{2}$ شعاع همسایگی $= \varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$

ج) اگر x_0 در همسایگی متقارن، حذف شود ؛ $(a,b)-\{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می گوییم.

$$(a,b)-\{x_0\} = \{x|\ 0 < |x-\delta| < \varepsilon\ ;\ \delta = \frac{a+b}{2}\ , \varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$$

مثال) $(2,4)-\{3\}$ یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز 3 و شعاع 1 می باشد.



$$(2,4)-\{3\} = \{x|\ |x-3| < 1$$

همسایگی راست و همسایگی چپ:

د) اگر $r > 0$ باشد، در این صورت بازه‌ی $(a, a+r)$ را یک همسایگی راست a و بازه‌ی

$(a+r, a)$ را یک همسایگی چپ a می‌نامیم. مانند بازه‌ی $\left(1, \frac{1}{02}\right)$ که یک همسایگی راست عدد یک و بازه‌ی $\left(-\frac{0}{98}, 1\right)$ که یک همسایگی چپ عدد یک است.

مثال۲) مجموعه جواب $\left\{x \mid \frac{1}{|x-2|} > 1\right\}$ همسایگی متقارن محذوف به مرکز چه عدد و شعاع چه عددی است؟

مثال۳) با رسم توابع $y = \sqrt{x+1}$ و $y = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$ ، همسایگی‌های چپ و راست را در نقاط بارز نمودار تشریح کنید.

مثال ۴) عدد $x = 2$ در تابع $y = \frac{1}{[x]-2}$ چه نوع همسایگی دارد؟ عدد $x = 3$ چه نوع همسایگی دارد؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

به طور کلی:

بازه‌ی باز $(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$ را یک همسایگی متقارن محذوف a گوییم و می‌نویسیم:

$$(a-\delta, a+\delta)-\{a\}=\{x\,;\,0<|x-a|<\delta\}$$

همچنین $a<x<b$ یک همسایگی به مرکز $\frac{a+b}{2}$ و شعاع $\frac{|a-b|}{2}$ است.

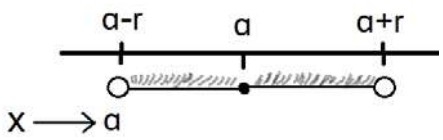
مثال ۱-کدام برای همسایگی متقارن محذوف نادرست است؟

1) $\{x\,;\ |x-a|<\delta\}$ 2) $(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$

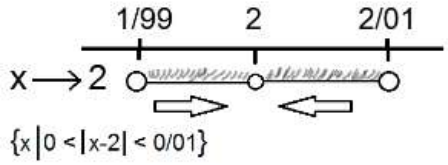
3) $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$ 4) $\frac{1}{|x-a|}>\frac{1}{\delta}$

تعریف و معرفی چند اصطلاح و نماد

میل کردن (نزدیک شدن) : $x\to a$ می خوانیم : متغیر x به سمت عدد a میل می کند. (نزدیک می شود.) در این حالت x از دو طرف a ، می تواند به a نزدیک شود.

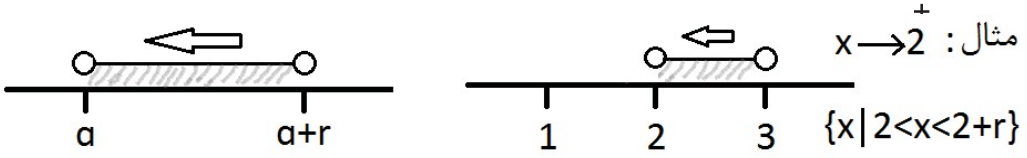


مثال)

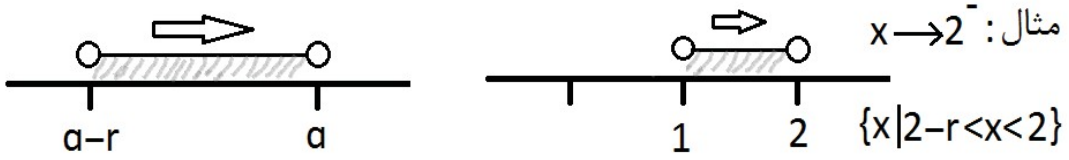


www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$x \to a^+$: می خوانیم x از سمت راست به عدد a نزدیک می شود. به عبارت دیگر $a < x$ است.



$x \to a^-$: می خوانیم x از سمت چپ به عدد a نزدیک می شود. به عبارت دیگر $a > x$ است.



حد تابع f در نقطه مانند a

فرض کنیم تابع f با ضابطه f(x) در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالا خود a) تعریف شده باشد.

می‌گوییم: حد تابع f وقتی x به a نزدیک میشود برابر عدد حقیقی $\mathcal{L}$ است هرگاه با نزدیک شدن متغیر x به عدد a ($x \neq a$) مقادیر y تابع f به عدد $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L} \in \mathbb{R}$) نزدیک میشود و ان را به صورت روبرو می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \mathcal{L}$$

نکته: شرط لازم در بحث وجود حد تابع f در نقطه a ، وجود حداقل یک همسایگی محذوف a می باشد و به عبارت دیگر اگر تابع در $x = a$ هیچ همسایگی نداشته باشد، تابع در a حد ندارد.

تعریف حد چپ و راست:

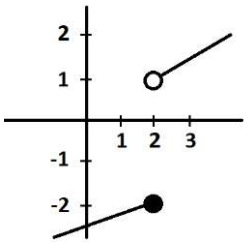
فرض کنیم تابع f در همسایگی چپ نقطه‌ی a تعریف شد باشد. می‌گوییم : حد چپ تابع f در نقطه‌ی a برابر عدد $\mathcal{L}$ است. هرگاه x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کنیم، آنگاه مقادیر $f(x)$ به عدد $\mathcal{L}$ نزدیک می شود و آنرا با نماد روبرو می نویسیم: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \mathcal{L}$

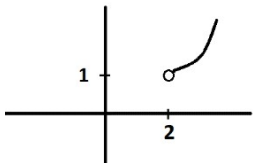
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

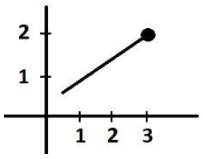
به طور مشابه برای حد راست داریم: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\mathcal{L}$ یعنی اگر x را به اندازه‌ی کافی از سمت راست به a نزدیک کنیم، آنگاه مقادیر $f(x)$ به عدد $\mathcal{L}$ نزدیک می‌شود.

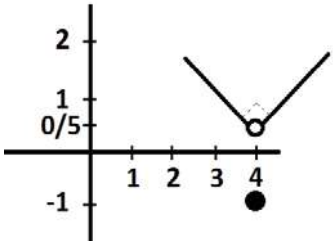
نکته : برای تعیین حد یک تابع از روی نمودار ابتدا عدد a (که به ان نزدیک میشویم) را روی محور xها مشخص کرده و بررسی می‌کنیم که از سمت چپ و راست آن yان به چه عددی نزدیک می‌شود. مانند: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$









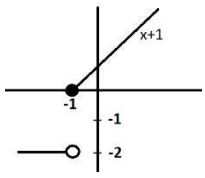
در ۲حد ندارد⇒ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-2$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$

⇔ در ۴حد نیم دارد⇒ $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\frac{0}{5}$ و $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\frac{0}{5}$

قضیه: شرط کافی برای اینکه حد تابع f در نقطه a برابر $\mathcal{L}$ باشد این است که حد راست تابع f در نقطه a برابر حد چپ تابع f در نقطه a برابر $\mathcal{L}$ باشد به عبارت دیگر :

$$\lim_{x\to a} f(x)=\mathcal{L} \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)=\mathcal{L} \ , \lim_{x\to a^-} f(x)=\mathcal{L}$$

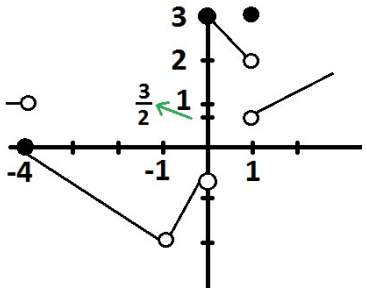
مثال: آیا تابع f با ضابطه‌ی زیر در نقطه $x=-1$ حد دارد؟ $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq -1 \\ -2 & x<-1 \end{cases}$



موجود نیست $\lim\limits_{x\to(-1)} f(x)$ ⇒ $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-2$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=0$

مثال: نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. حدها را بیابید.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا



A) $\lim_{x\to(-4)} f(x) =$

B) $\lim_{x\to 0} f(x^2 - x) =$

C) $f(1) + \lim_{x\to 1^-} f(x) =$

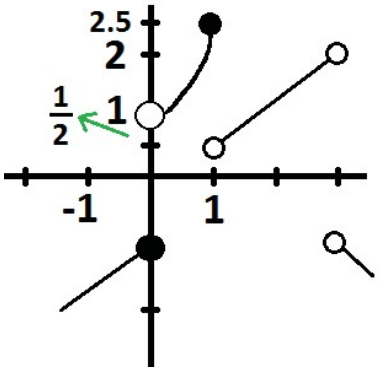
D) $\lim_{x\to -1} f(f(x)) =$

E) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) =$

F) $\lim_{x\to -1} f(x-1) =$

تمرین در کلاس

۱. با توجه به نمودار تابع f در روبه رو ، حاصل را بدست آورید.



A) $f(1) - \lim_{x\to 2} f(x) =$

B) $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$

C) $\lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 1^+} f(x) =$

D) $\lim_{x\to 0^+} fof(x) =$

E) $\lim_{x\to 0} f(1-x^2) =$

$E)\ \lim_{x\to 3} f(x) =$

2. تابع روبرو مفروض است: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 1 \\ 4-x & x < 1 \end{cases}$

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) حد تابع f را در نقاط $x = 1 , x = -1$ بررسی کنید.

ج) مقادیر f را در این دو نقطه در صورت وجود بنویسید.

۳. $f(x) = [x] + [-x]$

الف) حد تابع f را در نقاط $x = \sqrt{3} , x = -2$ تعیین کنید.

ب) حدتابع f را در نقطه $x = a \ \ (a \in \mathbb{R})$ در صورت وجود تعیین کنید.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۴. با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-2 & x\in\mathbb{Z}\\ x+3 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ در بازه‌ی $[-4\ ,\ 5]$ حد توابع زیر را بنویسید.

A) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$

B) $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x)=$

C) $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}} f(x)=$

D) $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}} f(x)=$

۵. الف) دامنه تابع $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ را تعیین کنید.

ب) حد تابع f را در نقاط $x=0\ ,\ x=1$ بررسی کنید.

۶. الف) دامنه تابع $f(x)=\frac{x}{[x]-1}$ را بدست آورید.

ب) حد تابع f را در نقاط $x=3\ ,\ x=1$ بررسی کنید.

قضایای حد

۱) قضیه:

الف) حد تابع ثابت $f(x)=c\quad(c\in\mathbb{R})$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار ثابت است.

یعنی: $\lim\limits_{x\to a} c=c$

ب) حد هر تابع همانی $i(x)=x$ در هر عدد دلخواه a برابر a است.

یعنی : $\lim\limits_{x\to a} x=a$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: B) $\lim_{x\to -3}(x) = -3$ A) $\lim_{x\to 7}(-5) = -5$

۲) **قضیه:** اگر دو تابع f و g در نقطه $x = a$ حد داشته باشند

و $\lim_{x\to a} g(x) = \mathcal{L}_2$ و $\lim_{x\to a} f(x) = \mathcal{L}_1$ ، آنگاه:

الف) مجموع و تفاضل و ضرب این دو تابع در نقطه $x = a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = \mathcal{L}_1 \pm \mathcal{L}_2$$

$$\lim_{x\to a}(f \times g)(x) = \lim_{x\to a}(f(x) \times g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$$

ب) تابع $\frac{f}{g}$ به شرط آنکه $\mathcal{L}_2 \neq 0$ در $x = a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2}$$

نتایج قضیه۲:

A) $\lim_{x\to a} kf(x) = k \times \lim_{x\to a} f(x) = \mathrm{k} \times \mathcal{L}$

B) $\lim_{x\to a} f^n(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$

C) $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$; $(\lim f(x) \neq 0)$

نکته: برای استفاده از قضیه 2، ابتدا باید بررسی شود که حد توابع f و g در نقطه a موجود باشد.

۳) قضیه: هر چند جمله ای مانند $p(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x^1 + b_0$ در هر نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله‌ای در نقطه $x = a$ برابر است. یعنی :

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\lim_{x\to a}(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) = b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \cdots + b_1 a + b_0$$

۴) قضیه: اگر تابع f در همسایگی محذوف a نامنفی باشد و در این نقطه حد داشته باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

به طور کلی برای هر عدد طبیعی n ، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد،آنگاه

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

۵) قضیه: برای هر عدد حقیقی a داریم: $\lim_{x\to a}\sin x = \sin a$, $\lim_{x\to a}\cos x = \cos a$

مثال ها:

۱) توابع $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & x < 1 \\ x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x < 1 \\ 1 - x & x \geq 1 \end{cases}$ مفروض‌اند. پاسخ حدها را بدست آورید.

A) $\lim_{x\to 1}(f+g)(x) =$

B) $\lim_{x\to 0}(f \times g)(x) =$

C) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

D) $\lim\limits_{x\to(-1)}(2f-g)(x)=$

۲) مقدار حد های زیر را بدست آورید.

A) $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})}(-x^3)=-\left(-\sqrt{2}\right)^3=-\left(-\sqrt{8}\right)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

B) $\lim\limits_{x\to(-2)}\dfrac{x^2-|x|+1}{3x+1}=\dfrac{(-2)^2-|-2|+1}{3(-2)+1}=\dfrac{4-2+1}{-6+1}=\dfrac{3}{-5}$

C) $\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})}\dfrac{x-[x]}{2-x}=\dfrac{\sqrt{2}-[\sqrt{2}]}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{-\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

E) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{|\sin x|}{x-\frac{\pi}{2}}=\dfrac{|\sin\pi|}{\pi-\frac{\pi}{2}}=\dfrac{0}{\frac{\pi}{2}}=0$

F) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x-x^2-2\pi\cos 2x}=\sqrt{\sin\dfrac{\pi}{2}-(\dfrac{\pi}{2})^2-2\pi\cos 2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}=\cdots$

۳) فرض کنید f یک تابع باشد ؛ بطوریکه $\lim\limits_{x\to2}f(x)=5$ و $\lim\limits_{x\to4}f(x)=5$ ، آیا می توان گفت که f تابعی ثابت است؟ چرا؟

۴) تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم:

$\lim\limits_{x\to3}\frac{g(x)+x}{x^2-2}=2$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) اگر $\lim_{x\to(-2)} f(x) = 3$ باشد، حاصل حدهای زیر را بیابید.

A) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-3}{x^2} =$

B) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)+1}{f(x)} =$

۶) الف) اگر حد تابع f در $x = a$ موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد، در مورد وجود تابع f+g و f−g چه می‌توان گفت؟

ب) اگر توابع f و g در $x = a$ حد نداشته باشند، در مورد حد تابع f±g در a چه می‌توان گفت؟

۷) تابع f با ضابطه‌ی رو برو در نقطه $x = -2$ حد دارد. مقدار a را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+[x]}{|x|} & x < -2 \\ \sqrt{-2x} + 2a & x > -2 \end{cases}$$

۸) تابع g در مجموعه اعداد حقیقی حد دارد. مقادیر a و b را بیابید.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - ax & |x| > 1 \\ \frac{b}{x} + [x] & |x| < 1 \end{cases}$$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) الف) توابع f و g مثال بزنید بطوریکه $(f+g)$ در $x=2$ حد داشته باشد اما حداقل یکی از f یا g در $x=2$ حد نداشته باشد.

ب) توابع f و g را چنان مثال بزنید که در در $x=3$ حد نداشته باشند اما g×f در $x=2$ حد داشته باشد.

محاسبه حد توابع کسری (رفع ابهام $\frac{0}{0}$)

برای محاسبه حد f با ضابطه $f(x)$ در نقطه $x=a$، عدد a را در تابع f جایگزین می‌کنیم:

اگر بعد از محاسبه به یک عدد حقیقی رسیدیم، جواب حدِ تابع است.

اگر تابع به صورت $\frac{f}{g}$ باشد و با جایگذاری $x=a$ به کسر $\frac{0}{0}$ رسیدیم به طوریکه صفرهای به دست آمده در صورت و مخرج بسیار نزدیک به صفر باشند، با حالت مبهم رو برو هستیم که باید رفع ابهام شود. منظور از رفع ابهام $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ این است که به کمک ترفندهایی مناسب که در مثال‌ها خواهد آمد، عامل $(x-a)$ را در صورت و مخرج ایجاد کرده و آنها را حذف کنیم و بعد از حذف $(x-a)$ عمل جایگذاری a و محاسبه را دوباره انجام دهیم تا به یک عدد حقیقی برسیم که جواب حد است.

مثال۱: حاصل حدها را بیابید. ۱. به کمک تجزیه(مزدوج، جمله مشترک، چاقو لاغر و فاکتورگیری)

$$\text{A)}\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{4^2-16}{4-4}=\frac{16-16}{0}=\frac{0}{0}.\ \text{مبهم}\quad\Rightarrow\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}=4+4=8$$

$$\text{B)}\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{9x-3x^2}=\cdots$$

$$\text{C)}\lim_{x\to 8}\frac{x^2-x-72}{3x^2+11x-104}=\cdots$$

$$D)\lim_{x\to 14^-}\frac{x^2-196}{|x-14|}=\cdots$$

$$\text{E)}\lim_{x\to 1^+}\frac{[x]-x}{|x-1|}=\cdots$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲. حذف رادیکال به کمک ضرب مزدوج مثال: حدها را بیابید.

$$\text{F)}\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x+3)(x-2)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

$$\text{G)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{2x-x^2}=\cdots$$

$$\text{H)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x}{x-x^2}=\cdots$$

$$\text{I)}\ \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-64}=\cdots$$

$$\text{J)}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sin^3x-1}{sin^2x-1}=\cdots$$

مثال۲: حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to 3}(-5)=\cdots$ ۲) $\lim_{x\to 3}x=\cdots$ ۳) $\lim_{x\to -2}\frac{-x^3-20}{9x+3x^2}=\cdots$ ۴) $\lim_{x\to -1}(-x^2+1)=\cdots$

۵) $\lim_{x\to 3}(-5)=\cdots$ ۶) $\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\cdots$ ۷) $\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x+3x^2}=\cdots$ ۸) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{-x^2+1}{x+1}\right)=\cdots$

۹) $\lim_{x\to 3}(-5x)=\cdots$ ۱۰) $\lim_{x\to 3}[x]=\cdots$ ۱۱) $\lim_{x\to -9}\frac{x^3+243}{x^2-81}=\cdots$

۱۲) $\lim_{x\to 1^-}\left(\sqrt{1-x}\right)=\cdots$ ۱۴) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(tan2x-cot4x)=\cdots$

۱۴) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{6}}sin7x=\cdots$ ۱۵) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{8}}(sin2x-cos2x)=\cdots$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۶) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}(x-[x])=\cdots$

۱۷) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-3x+2}=\cdots$

مثال۳: بارسم تابع ساده قدرمطلق، جزء صحیح، رادیکالی و گویا حد تابع را در نقاط خاص و معمولی آن بررسی کنید.

مثال۴.

الف) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16}=\cdots$

ب) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-4}{x^3-[x^3]}=\cdots$

ج) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\cdots$

پیوستگی:

الف) پیوستگی در یک نقطه $(x=a)$

تعریف پیوستگی: تابع f را در $x=a$ پیوسته گوییم هرگاه : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

به عبارت دیگر برای پیوسته بودن تابع f در نقطه $x=a$ باید سه شرط زیر همزمان برقرار باشد:

1) $f(a)=A$ موجود و تعریف شده	2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\mathcal{L}\ ,\ \mathcal{L}\in\mathbb{R}$

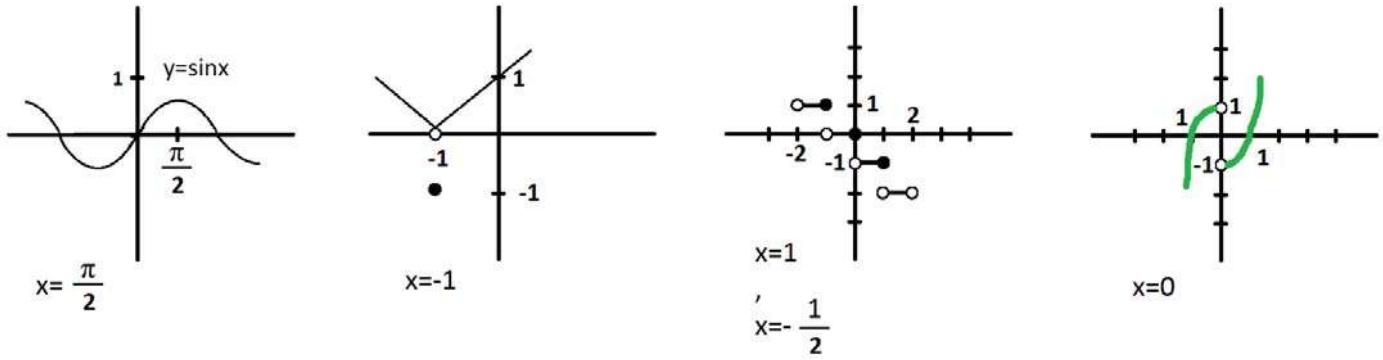
3) $A=\mathcal{L}$: حد در (۲) = مقدار در (۱)

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته: اگر حداقل یکی از سه شرط گفته شده برقرار نباشد، می‌گوییم f در $x=a$ پیوسته نیست.

مثال: پیوستگی توابع زیر را در نقاط مشخص شده بررسی کنید.



مثال: توابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ -2 & x=1\end{cases}$ مفروض‌اند.

پیوستگی توابع را در $x=1$ بررسی کنید. $f(1)=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$ موجود نیست بنابراین f در $x=1$ پیوسته نیست

① $g(1)=-2$

$\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=1+1=2$ →②

③ $g(1)\neq\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ پس g در $x=1$ پیوسته نیست.

تعریف پیوستگی راست و چپ:

تابع f در $x=a$ را از راست پیوسته می‌گوییم (پیوستگی راست دارد) هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

تابع g در $x=a$ از چپ پیوسته است (پیوستگی چپ دارد) هرگاه:

$$\lim_{x\to a^-} g(x)=g(a)$$

مثال: پیوستگی تابع ها را در نقاط تعیین شده بررسی کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

الف) تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ در نقطه $x=0$:

① $f(0)=1$

بنابراین f در $x=0$ پیوسته نیست. اما

چون حد راست $=f(0)$ است، f

در $x=0$ پیوستگی راست دارد.

② $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1\end{cases}$

③ $f(0)\neq\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ب) تابع $g(x)=(x-2)[x]$ در نقطه $x=2$:

① $g(2)=(2-2)[2]=0\times 2=0$

② $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)[x]$

$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)[x]=(2-2)[2^+]=0\times 2=0\\ \lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)[x]=(2-2)[2^-]=0\times 1=0\end{cases}\rightarrow \lim\limits_{x\to 2} g(x)=0$

③ $g(2)=\lim\limits_{x\to 2} g(x)=0$ $\rightarrow$ تابع g در $x=2$ پیوسته است.

ج) تابع $h(x)=\begin{cases}-x^2+2x & x<-1\\ -3 & x=-1\\ \cos(\pi-x\pi) & x>-1\end{cases}$ در نقطه $x=-1$:

① $h(-1)=-3$

② $\lim\limits_{x\to(-1)^-} h(x)=-(-1)^2+2(-1)=-1-2=-3$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} h(x)=\cos(\pi+\pi)=\cdots$

h در ۱- حد ندارد. درنتیجه h در (۱-) پیوسته نیست؛ اما پیوستگی **چپ دارد.**

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ب) پیوستگی در یک بازه:

A) تابع f را بر بازه‌ی باز (a,b) پیوسته گوییم هرگاه در بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد.

B) تابع f را بر بازه‌ی بسته $[a,b]$ پیوسته گوییم هرگاه :

۱. تابع در هر نقطه بازه (a,b) پیوسته باشد.

۲. تابع در $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد.

۳ .تابع در $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

C) پیوستگی تابع f بر بازه‌ی $[a,b)$ و $(a,b]$ نیز به طور مشابه تعریف می شود.

مثال:۱. تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ بر بازه ی $[1,2]$ پیوسته است. چرا؟

۲. تابع $f(x) = [x]$ بر بازه $(0,1)$ پیوسته است اما بر بازه $[0,1]$ پیوسته نیست. همچنین بر بازه $[0,1)$ نیز پیوسته است. چرا؟

مثال: پیوستگی تابع $f(x) = [x] + [-x]$ را در مجموعه ی $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ بررسی کنید.

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

$a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ؛ در هر نقطه دلخواه از مجموعه

$$a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \rightarrow \begin{cases} f(x) = [a] + [-a] = -1 \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = -1 \\ f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \end{cases} \Longrightarrow$$

پیوسته است. بنابراین f در $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ پیوسته است.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۱: تابع $f(x)=\begin{cases} tan\frac{(2x+1)\pi}{2} & x\le 1 \\ \frac{|x^2-x-2|}{a(1-x)} & 1<x<5 \\ b(x-[-x]) & x\ge 5 \end{cases}$ در بازه $[1,5]$ پیوسته است. مقدار $ba=?$ (کنکور ۱۴۰۱)

مثال۲: تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{8+x^3}{|x+2|} & x\neq -2 \\ a & x=-2 \end{cases}$ در $x=-2$ ازچپ پیوسته است. مقدار $a=?$ (کنکور ۹۸)

کار در منزل

۱) تابع با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases} x^2-bx-1 & x<2 \\ ax+b & x>2 \end{cases}$ با شرط $f(2)=5$ ، روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار a را بیابید.(تجربی۹۱)

۲) به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} 3x-[x] & x<2 \\ a & x=2 \\ x+2 & x>2 \end{cases}$ در $x=2$ پیوسته است؟ (تجربی۹۲)

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) به ازای چه مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x} & 1\le x\le 6\\ a+\cos^2\frac{\pi x}{36} & x>6\end{cases}$ روی مجموعه‌ی عددهای حقیقی بزرگتر از ۱ پیوسته است؟ (تجربی۹۴)

۴) به ازای چه مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & 0<x<a\\ 1-\frac{x}{4} & x\ge a\end{cases}$ در دامنه اش پیوسته است؟ (ریاضی۹۵)

۵) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax-a+2 & x\le 1\\ \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & x>1\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x=2$ پیوسته است؟ (تجربی۹۶)

۶) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & x\notin\mathbb{Z}\\ a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a روی مجموعه عددهای حقیقی پیوسته است؟ (ریاضی۹۶)

۷) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{2x-\pi} & x\neq\frac{\pi}{2}\\ a & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a روی بازه $[0,2\pi]$ پیوسته است؟ (تجربی۹۲)

۸) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos 3x}{\cos x} & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ \sin 5x-a & \frac{\pi}{2}\le x\le 2\pi\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a روی بازه $[0,2\pi]$ پیوسته است؟ (تجربی۹۴)

۹) اگر $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=\begin{cases}f(x) & x\notin\mathbb{Z}\\ f(x)-1 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ باشد، آنگاه تعداد نقطه‌های ناپیوستگی تابع g روی بازه ی $[-4,4]$ کدام است؟ (ریاضی۹۲)

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) تابع $f(x) = [3x]$ روی بازه ی $(1, 4)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱۱) تابع $f(x) = [x]$ روی بازه ی $(k, -2)$ پیوسته است. کمترین مقدار k را بیابید.

۱۲) تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2-mx+1}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. حدود m را تعیین کنید.

۱۳) بزرگترین بازه ای که تابع $f(x) = \sqrt{2 - |x+1|}$ روی آن پیوسته است را بیابید.

۱۴) تابع $f(x) = (-1)^{[x]} \times \sin\frac{\pi x}{2}$ در نقطه های $x \in \mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟ (ریاضی۹۳)

۱۵) تابع $f(x) = [x^2]$ روی بازه ی $(2, 2+k)$ پیوسته است. بیشترین مقدار k را بیابید.

۱۶) تابع $f(x) = \begin{cases} 4 & x^2 = |x| \\ x+2 & x^2 \neq |x| \end{cases}$ در چند نقطه از دامنه اش ناپیوسته است؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا