خرید آنلاین در gajmarket.com

کار در کلاس ..... صفحهٔ ۶۱ کتاب درسی

۱ معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

(راهنمایی: مثال را ملاحظه کنید، از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود.)

اعداد صحیح و مثبت، همان اعداد طبیعی‌اند. بنابراین باید جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=7$ را پیدا کنیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_1\geq 1\Rightarrow x_1-1\geq 0\\ x_2\geq 1\Rightarrow x_2-1\geq 0\\ x_3\geq 1\Rightarrow x_3-1\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow x_1-1+x_2-1+x_3-1=7-1-1-1$$

با در نظر گرفتن $y_i=x_i-1$ $(i=1,2,3)$ می‌توان نوشت:

$$\underbrace{x_1-1}_{y_1}+\underbrace{x_2-1}_{y_2}+\underbrace{x_3-1}_{y_3}=4\Rightarrow y_1+y_2+y_3=4\ ,\ y_i\geq 0\,(i=1,2,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} n=4\\ k=3\end{array}\right\}\Rightarrow\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!\times 4!}=15$$

۲ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

(راهنمایی: ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برداشته و لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه به $(n-k)$ تقلیل می‌یابد و ...)

اعداد صحیح و مثبت، همان اعداد طبیعی‌اند. پس باید جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ را بیابیم.

$$\left.\begin{array}{l} x_1\geq 1\Rightarrow x_1-1\geq 0\\ x_2\geq 1\Rightarrow x_2-1\geq 0\\ \vdots\\ x_k\geq 1\Rightarrow x_k-1\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow x_1-1+x_2-1+\cdots+x_k-1=n\underbrace{-1-1-\cdots-1}_{k\text{ تا}}$$

با در نظر گرفتن $y_i=x_i-1$ $(i=1,2,\cdots,k)$ می‌توان نوشت:

$$\underbrace{x_1-1}_{y_1}+\underbrace{x_2-1}_{y_2}+\cdots+\underbrace{x_k-1}_{y_k}=n-k\Rightarrow y_1+y_2+\cdots+y_k=n-k\ ,\ y_i\geq 0\,(i=1,2,\cdots,k)$$

در واقع باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ جدید یعنی $y_1+y_2+\cdots+y_k=n-k$ را به دست آوریم که برابر است با:

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$$

۳ معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_5=14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_1>1$ و $x_3>3$ باشد؟

$$\left.\begin{array}{l} x_1>1\Rightarrow x_1\geq 2\Rightarrow x_1-2\geq 0\xrightarrow{y_1=x_1-2} y_1\geq 0\\ x_3>3\Rightarrow x_3\geq 4\Rightarrow x_3-4\geq 0\xrightarrow{y_3=x_3-4} y_3\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow (x_1-2)+x_2+(x_3-4)+x_4+x_5=14-2-4$$

بنابراین معادلهٔ اصلی را به صورت روبه‌رو بازنویسی می‌کنیم: $y_1+x_2+y_3+x_4+x_5=8$

حال جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ جدید را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} k=5\\ n=8\end{array}\right\}\Rightarrow\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{12}{4}=\frac{12!}{4!\times 8!}=495$$

@cipbooks
قبل از ارسال کتاب‌های دانشگاهی در کانال سی پی بوکز عضو شوید