خرید آنلاین در gajmarket.com

نتیجه ..... صفحهٔ ۴۰ کتاب‌درسی

از طرفی $\sum_{v\in V(G)} deg(v)$ و $\sum_{v\in B} deg(v)$ زوج‌اند. (چرا؟) اگر q تعداد یال‌های گراف G باشد، با توجه به قضیه داریم:

$$\sum_{v\in V(G)} deg(v) = 2q \quad (\text{زوج})$$

از طرفی اگر $v_1, v_2, \dots, v_n$ رئوس زوج گراف G باشند، در این صورت درجهٔ هر یک از این رئوس زوج است و اگر $(k_i \in \mathbb{N})\ (1 \le i \le m) deg(v_i) = 2k_i$، داریم:

$$\sum_{v\in B} deg(v) = deg(v_1) + deg(v_2) + \dots + deg(v_m) = \underbrace{2k_1 + 2k_2 + \dots + 2k_m}_{2q'} = 2q' \quad (\text{زوج})$$

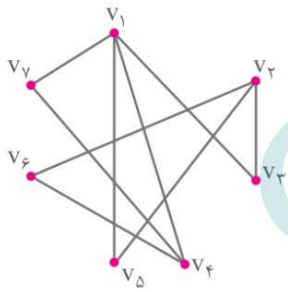
بنابراین $\sum_{v\in A} deg(v)$ نیز عددی زوج است و این نتیجه می‌دهد که $n(A)$ عددی زوج است. (چرا؟) اگر $V_{m+1}, V_{m+2}, \dots$ و V'_n رئوس فرد گراف باشند، در این صورت:

$$\sum_{V\in A} deg(v) = 2q' \Rightarrow \underbrace{deg(v_{m+1})}_{\text{فرد}} + \underbrace{deg(v_{m+2})}_{\text{فرد}} + \dots + \underbrace{deg(v_n)}_{\text{فرد}} = 2q'$$

یعنی مجموع n تا عدد فرد، زوج است و چون حاصل‌جمع تعداد زوجی از اعداد فرد، زوج می‌شود، باید n عددی زوج باشد.یعنی تعداد رئوس فرد گراف زوج است.

فعالیت ..... صفحهٔ ۴۰ کتاب‌درسی

یک جمع ۷ نفره از دانش‌آموزان یک کلاس را در نظر بگیرید. فرض کنید دوستی بین اعضای این گروه یک رابطهٔ دوطرفه است، یعنی هر دو نفر از آنها یا هر دو با هم دوست‌اند و یا هیچ‌یک با دیگری دوست نیست. اکنون:



الف) گرافِ ۷ رأسی G را تشکیل دهید به این صورت که به ازای هر دانش‌آموز یک رأس قرار دهید، سپس هر دو رأس را به هم وصل کنید اگر و تنها اگر دانش‌آموزان متناظر با آن دو رأس با هم دوست باشند.

ب) با استفاده از قضیهٔ قبل نشان دهید که امکان ندارد درجهٔ تمام رئوسِ گرافِ حاصل برابر با ۳ باشد.

اگر درجهٔ هر رأس ۳ باشد، مجموع درجات رئوس برابر $7\times 3 = 21$ است و زوج نیست، در حالی که طبق قضیه، مجموع درجات رئوس هر گراف باید زوج باشد. بنابراین چنین چیزی امکان ندارد.

پ) با توجه به مراحل قبل و با استفاده از گراف نشان دهید اگر تعداد افراد یک جمع عددی فرد باشد امکان ندارد تمام نفرات آن جمع، دارای تعداد فردی دوست در آن جمع باشند. اگر تعداد افراد را با p (عددی فرد) نشان دهیم، پس $v_1, v_2, \dots, v_p$ مجموعهٔ افراد خواهند بود. حالا اگر تعداد دوستان هر نفر عددی فرد باشد، به این مفهوم است که $(1 \le i \le p)$ $deg v_i$ فرد خواهد بود. بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{p} deg(v_i) = \underbrace{\underbrace{deg(v_1)}_{\text{فرد}} + \underbrace{deg(v_2)}_{\text{فرد}} + \dots + \underbrace{deg(v_p)}_{\text{فرد}}}_{\text{p تا عدد فرد جمع شده‌اند.}} \overset{\text{p فرد}}{=\!=} \text{عددی فرد}$$

بنابراین مجموع درجات رئوس گراف مربوط به این رابطهٔ دوستی عددی فرد است که در تناقض با قضیه است. پس امکان ندارد تمام نفرات این جمع، تعداد فردی دوست داشته باشند.

خرید آنلاین در gajmarket.com

فعالیت

صفحهٔ ۴۰ کتاب‌درسی

فرض کنید G یک گراف باشد و داشته باشیم $\delta(G) \geq ۴$. می‌خواهیم نشان دهیم که G شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است.

① **رأس دلخواه $v_۱$ را در G در نظر می‌گیریم. حتماً $v_۱$ به رأس دیگری متصل است. (چرا؟) فرض کنیم آن رأس $v_۲$ باشد.**

زیرا $\delta(G) \geq ۴$ به این معنی است که حداقل درجهٔ رئوس این گراف ۴ است، یعنی هر رأس گراف از جمله $v_۱$ حداقل به ۴ رأس دیگر وصل است.

② **حتماً $v_۲$ به رأسی به‌جز رأس $v_۱$ متصل است. (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس $v_۳$ باشد.**

چون $\delta(G) \geq ۴$ ، پس $\deg v_۲ \geq ۴$ یعنی $v_۲$ به‌جز $v_۱$ ، حداقل به ۳ رأس دیگر متصل است.

③ **حتماً $v_۳$ به رأسی از مجموعهٔ $V(G)-\{v_۱ , v_۲\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس $v_۴$ باشد.**

طبق فرض $\deg v_۳ \geq ۴$ یعنی $v_۳$ غیر از $v_۱$ و $v_۲$ ، حداقل به دو رأس دیگر متصل است.

④ **حتماً $v_۴$ به رأسی از مجموعهٔ $V(G)-\{v_۱ , v_۲ , v_۳\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس $v_۵$ باشد.**

طبق فرض $\deg v_۴ \geq ۴$ یعنی $v_۴$ غیر از $v_۱$ ، $v_۲$ و $v_۳$ ، حداقل به یک رأس دیگر متصل است.

⑤ **مسیر $v_۱v_۲v_۳v_۴v_۵$ یک مسیر به طول ۴ در گراف G است.**

کار در کلاس

صفحهٔ ۴۰ کتاب‌درسی

در هر یک از حالت‌های زیر تعداد یال‌های گراف G را به دست آورید.

الف) G یک گراف n رأسی K-منتظم است.

G یک گراف n رأسی است که درجهٔ هر رأس آن K است، بنابراین مجموع درجات رئوس آن برابر $n \times K$ خواهد بود.

بنابراین طبق قضیهٔ مجموع درجات رئوس گراف داریم:

$$۲q = n \times K \Rightarrow q = \frac{nK}{۲}$$

ب) G یک گراف n رأسی کامل است. $(G = K_n)$

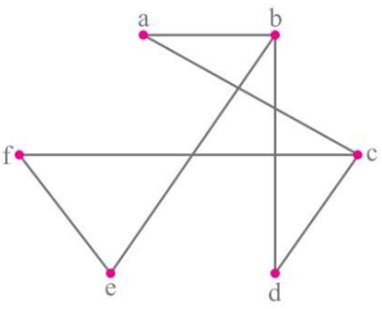
در یک گراف n رأسی کامل، درجهٔ هر رأس برابر $n-۱$ است، بنابراین مجموع درجات رئوس $n(n-۱)$ خواهد بود. پس طبق قضیهٔ مجموع درجات رئوس گراف داریم:

$$۲q = n(n-۱) \Rightarrow q = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

تمرین

صفحهٔ ۴۱ و ۴۲ کتاب‌درسی

① **گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G) = \{a , b , c , d , e , f\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(G) = \{ab , ac , cd , ef , db , cf , be\}$ مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.**



الف) مرتبه و اندازهٔ گراف G را بنویسید. $|V(G)| = ۶ \ , \ |E(G)| = ۷$

ب) درجهٔ رأس‌های G را مشخص نمایید.

$$\deg(a) = ۲ , \deg(b) = ۳ , \deg(c) = ۳$$

$$\deg(d) = ۲ , \deg(e) = ۲ , \deg(f) = ۲$$