خرید آنلاین در gajmarket.com

۴) آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که: $x^۲+y^۲=(x+y)^۲$

$x^۲+y^۲=(x+y)^۲ \Leftrightarrow x^۲+y^۲=x^۲+y^۲+۲xy \Leftrightarrow ۲xy=۰ \Leftrightarrow xy=۰ \Leftrightarrow (x=۰)\vee(y=۰)$

بنابراین تساوی زمانی برقرار است که حداقل یکی از دو عدد x یا y صفر باشد. مانند: $(x=۰, y=۱)$ یا $(x=۱, y=۰)$ یا...

۵) آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که: $\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$ $(a+b\neq ۰)$

$\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b} \Leftrightarrow \frac{۱}{a+b}=\frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow ab=(a+b)^۲ \Leftrightarrow ab=a^۲+۲ab+b^۲ \Leftrightarrow a^۲+ab+b^۲=۰$

از قبل می‌دانیم که $a^۲+ab+b^۲\geq ۰$ است و تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که $a=b=۰$ باشد و چون $a, b\neq ۰$ در نتیجه $a^۲+ab+b^۲=۰$ جواب ندارد. پس هیچ دو عددی مانند a و b با شرایط مسئله وجود ندارد که $\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$ باشد.

۶) گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائهٔ مثال نقض آنها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

اثبات: عدد فرد $x=۲k+۱ (k\in\mathbb{N})$ را در نظر بگیرید. داریم:

x مربع $=x^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۲(\underbrace{۲k^۲+۲k}_{q_۱\in\mathbb{N}})+۱=۲q_۱+۱$ (عددی فرد)

x مکعب $=x^۳=(۲k+۱)^۳=۸k^۳+۱۲k^۲+۶k+۱=۲(\underbrace{۴k^۳+۶k^۲+۳k}_{q_۲\in\mathbb{N}})+۱=۲q_۲+۱$ (عددی فرد)

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

اثبات: فرض می‌کنیم عدد وسطی n باشد، در این صورت: $n-۲, n-۱, n, n+۱, n+۲$ پنج عدد طبیعی متوالی

میانگین $=\frac{(n-۲)+(n-۱)+n+(n+۱)(n+۲)}{۵}=\frac{۵n}{۵}=n$

همان‌طور که دیده می‌شود، میانگین همان عدد وسطی است.

درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی

۱) با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن جاهای خالی را پر کنید.

الف) $۷|۶۳ \Leftrightarrow ۶۳=۷\times ۹$

ب) $۹۱=۷\times ۱۳ \Leftrightarrow ۷|۹۱$

پ) $-۶|۵۴ \Leftrightarrow ۵۴=(-۹)\times(-۶)$

ت) $۵|-۳۵ \Leftrightarrow -۳۵=۵\times(-۷)$

ث) $۰=۱۸\times ۰ \Leftrightarrow ۱۸|۰$

ج) $a|۱ \Rightarrow a=۱$ یا $a=-۱$

چ) $۲۶=۲\times۱۳ \Rightarrow ۲|۲۶$ و $۱۳|۲۶$

خرید آنلاین در gajmarket.com

(۲) با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیمِ اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر، ابتدا نشان دهید که $۳^۵ | ۳^۹$ و سپس ثابت کنید:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m \leq n \Rightarrow a^m | a^n$$

$$(۳^۹ = ۳^۵ \times ۳^۴ \overset{(۳^۴=q)}{\Rightarrow} ۳^۵ | ۳^۹)$$

$$m \leq n \Rightarrow n - m \geq ۰ \Rightarrow a^{n-m} \in \mathbb{Z}$$

$$a^n = a^m \times a^{n-m} \xrightarrow{a^{n-m}=q} a^n = a^m \times q \Rightarrow a^m | a^n$$

سؤال ..... صفحهٔ ۱۰ کتاب‌درسی

آیا از اینکه $a | bc$ می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟ به گزاره‌های زیر دقت کنید و پس از آن پاسخ دهید:

الف) $۳ | ۹$ و $۳ | ۶$ و $۳ | ۶ \times ۹$

ب) $۳ \nmid ۵$ و $۳ | ۶$ و $۳ | ۶ \times ۵$

ج) $۶ \nmid ۴$ و $۶ \nmid ۳$ و $۶ | ۳ \times ۴$

اگر $a | bc$ در این صورت ممکن است a هیچ‌یک از اعداد b یا c را عاد نکند. به عبارت دیگر:

$$a | bc \not\Rightarrow a | b \vee a | c$$

سؤال ..... صفحهٔ ۱۰ کتاب‌درسی

آیا از اینکه $a | b$ می‌توان نتیجه گرفت $ka | kb$؟ آیا از $ka | kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a | b$؟ $(k \in \mathbb{Z})$

$$a | b \Rightarrow b = aq \overset{\text{در } k \text{ ضرب}}{\Rightarrow} kb = kaq \Rightarrow kb = ka(q) \Rightarrow ka | kb$$

$$ka | kb \Rightarrow kb = ka(q) \overset{\text{بر } k \text{ تقسیم}}{\Rightarrow} b = aq \Rightarrow a | b$$

پرسش متن ..... صفحهٔ ۱۱ کتاب‌درسی

ویژگی ۲: اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد آنگاه عدد a عدد c را می‌شمارد.

$$a | b \wedge b | c \Rightarrow a | c$$

اثبات: $\begin{cases} a | b \Rightarrow b = aq_۱ \ (۱) \\ b | c \Rightarrow c = bq_۲ \end{cases}$

$$c = bq_۲ \overset{(۱)}{\Rightarrow} c = aq_۱ q_۲ \overset{q_۱q_۲=q}{\Rightarrow} c = a \times q \Rightarrow a | c$$

سؤال ..... صفحهٔ ۱۱ کتاب‌درسی

با استفاده از خاصیت تعدّی برای رابطهٔ عاد کردن، نشان دهید که: $a | b \Rightarrow a | b^n$

اثبات: طبق فرض: $a | b$ و می‌دانیم: $b | b^n \overset{\text{تعدی}}{\Rightarrow} a | b^n$

@ciplbooks قبل از استفاده حتما در کانال بیی برای پیگوگن عضو شوید