۱۸) ساده شده کسر رو به رو را بدست آورید. (ریاضی۹۱)

$$\frac{(1+\tan^2 x)(1+\cot^2 x)}{1-\sin^2\alpha-\cos^4 x}=?$$

۱۹) دامنه ی توابع زیر را بدست آورید. نمودار قسمت (B) و (C) را رسم کنید.

$$A)y=\frac{1}{[\cos\pi x]}$$

$$B)\ y=\frac{\sin x}{\sin x}$$

$$C)\ y=\frac{\cos x}{\cos x}$$



فصل پنجم

توابع نمایی و لگاریتم

۱-تابع نمایی ۲-تابع لگاریتمی و لگاریتم ۳-ویژگی های لگاریتم و معادلات لگاریتمی

۱-توابع نمایی و لگاریتم

در این فصل ابتدا با تابع نمایی و نمودار آن و ویژگی‌های این تابع و کاربردهایی از آن آشنا می‌شویم. سپس با تابع لگاریتم و نمودار آن و قوانین آن و چند مورد از کاربرد لگاریتم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

الف) **تابع نمایی**: هر تابع با نمایش جبری $f(x)=\mathrm{a}^{\mathrm{x}}$ که در آن $a\neq 1$ و $a>0$ را یک تابع نمایی می‌نامیم.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۱. نمودار تابع $y = 2^x$ را رسم کنید و ویژگی‌های آن را بنویسید.

A) تابع (۱–۱) است. پس وارون دارد

B) این تابع صعودی است (افزایشی است)

C) $D_f = \mathbf{R}$, $\mathbf{R}_f = (0, +\infty)$

مثال ۲. نمودار تابع $y = 2^{-x}$ را رسم کنید و ویژگی‌های آن را بنویسید .

مثال ۳. کدام یک از توابع زیر نمایی نیستند؟ چرا؟

الف) $y = (-2)^x$ **ه) $y = \sqrt{2}^x$**

ب) $y = \pi^x + 1$ **ج) $y = 2 \times 3^{x-1}$** **د) $y = 1^x$**

مثال ۴. جاهای خالی را پر کنید.

در تابع $f(x) = a^x$:

A اگر $a > 1$ با افزایش مقدار x مقادیر f ..... می یابند.

B اگر $0 < a < 1$ با افزایش مقدار x مقادیر تابع f..... می یابند.

مثال۵. نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو ۱۰ ساعت است (یعنی بعد از گذشت ۱۰ ساعت نصف مقدار اولیه آن از دست می رود و این روند ادامه دارد. اگر مقدار اولیه این ماده ۴ گرم باشد.

الف)بعد از گذشت ۴۰ ساعت چه مقدار ماده می ماند؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ب)بعد از چه مدت ۱۰ گرم از این ماده باقی می‌ماند؟

ج) آیا با گذشت زمان این ماده تمام می شود؟ چرا؟

نکته:

تابع نمایی یک ماده با مقدار اولیه k واحد جرم و نیمه عمر i بعد از گذشت زمان t ، $f(t)$ مقدار ماده باقی می‌ماند.مقدار ماده باقی مانده از تابع زیر به دست می‌آید.

$$f(t) = k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{i}}$$

در این تابع k مقدار اولیه k = مقدار اولیه t = زمان $f(t)$ = مقدار ماده مانده

الف) $t = 40$

$$f(t) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{j}} \quad \Rightarrow \quad f(40) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{10}} = 4 \times 2^{-4} = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow$$

ب)

$$f(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 2^{-\frac{t}{10}} = 2^{-2} \quad \Rightarrow \quad t = 20$$

ج)خیر، زیرا این تابع نمایی است و مقدار آن به صفر نزدیک می شود اما صفر نمی شود.

مثال6.

الف) نمودار سه تابع $y = 2^x$ و $y = 3^x$ و $y = 5^x$ را رسم کنید و آنها را با هم مقایسه کنید.

ب) نمودار سه تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ را رسم کنید و آنها را با هم مقایسه کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۷. نیمه عمر کربن ۱۴، ۵۷۳۰ سال است مقدار آن بعد از t سال از رابطه $Q(t) = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ به دست می آید.

الف)مقدار اولیه این کربن چقدر است؟ ب)بعد از گذشت ۱۷۱۹۰ سال مقدار این نوع کربن چقدر است؟

ج)بعد از گذشت چند سال مقدار این کربن صفر می شود؟

مثال۸. اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ ، x و y دو عدد حقیقی دلخواه باشند حاصل عبارت زیر را بنویسید و مثال بزنید:

1) $a^0 =$ **2)** $a^1 =$ **3)** $a^x \times a^y =$

4) $a^x \div a^y$ **5)** a^{-x} **6)** $(a^x)^y =$

7) $(ab)^x =$ **8)** $\left(\frac{a}{b}\right)^x =$ **10)** $a^{\frac{x}{y}} =$

مثال۹. نامعادله و معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $3^x \times 9^{x+1} = 81 \div 3^{-5}$

ب) $2^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times 3^{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} = 36^{x+\sqrt{3}}$

ج) $8^{2x-1} > \frac{1}{512}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰. داروها در بدن با ادرار دفع می شوند. فرض کنید ۱۰ میلی گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t) = 10 \times (0/8)^t$ به دست می‌آید.

الف)مقدار دارو پس از ۶ ساعت چقدر است؟ ب)چه درصدی دارو در دو ساعت از بین می رود؟

مثال۱۱. درست و نادرست را تعیین کنید:

الف) عدد $\sqrt{8}$ بین 2^2 و 2^3 است.

ب) مقدار تقریبی $2^{\sqrt{7}}$ برابر $5/3$ است.

ج) هر تابع به فرم $y = ka^x \quad ; k \neq 0 , a \neq 1 , a > 0$ رفتار تابع نمایی دارد.

د)رابطه $q(t) = 10 \times \left(\frac{4}{5}\right)^t$ مقدار نمک حل نشده در آب پس از t دقیقه است. پس از ۲ دقیقه مقدار نمک حل نشده در آب $6/4$ گرم است.

ه) $a^x < a^y < a^z \quad : \quad x, y, z \in R$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین در منزل

۱. نمودار توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید

۱$y = 2^{x+1}$)

۲) $y = 2^{-x-1}$

۳) $y = -2^{x}$

4) $y = 2^{x} + 1$

۵) $y = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x} + 1$

۲. نمودارهای دو تابع $f(x) = 4^{x}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \frac{3}{2}$ در نقطه A متقاطع اند. فاصله نقطه A از نقطه $A(-1, 1)$ را بیابید.(ریاضی ۹۶)

۳. نمودارهای توابع $y = (\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}$ و $y = 3^{x} + \frac{8}{3}$ در نقطه A متقاطع اند. فاصله نقطه A از نقطه $A(-1, 1)$ را بیابید. (ریاضی ۹۶)

۴. در تابع $f(x) = ab^{x}$ و $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ و $b > 0$. مقدار ?$= f\left(\frac{3}{2}\right)$ را بیابید.(تجربی ۹۲)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵. مجموعه جواب را بیابید :

الف) $16^{x^2-\frac{1}{4}} < 8^x$

ب) $9^x - 3^x - 2 = 0$

ج) $2^{x+2} = 12$

۶. رفتار کدام یک از توابع زیر نمایی است؟

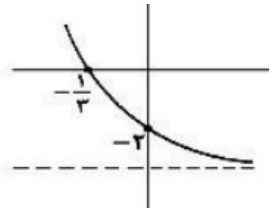
الف) $y = 2x + 1$ ب) $y = x^2 + 1$ ج) $y = \frac{x-2}{x}$ د) $y = \sqrt{2}^x - 1$

۷. جدول مقابل معرفی یک تابع نمایی است. نمایش جبری آن را بنویسید.

x	۰	۱۰	۲۰	۳۰
y	۸۰	۴۰	۲۰	۱۰

۸. اگر نمودار $f(x) = ab^x - 1$ از دو نقطه $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ و $B(1, 11)$ بگذرد، $f(-1) = ?$ (تجربی ۹۳)

۹. شکل نمودار تابع $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$ است. $f\left(-\frac{5}{3}\right) = ?$ (کنکور ۹۹)

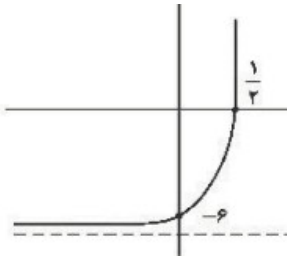


۱) ۵۴ ۲) ۶۰ ۳) ۴۸ ۴) ۲۸

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰. نمودار $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}-1 & x\le 1\\ 2^x & x>1\end{cases}$ و $g(x)=x^2$ در چند نقطه متقاطع اند؟(قلم چی ۹۵)

۱۱. شکل نمودار تابع $f(x)=-9+\left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$ است. $f(2)=?$ (کنکور۹۹ خارج)



۱) ۲۳۴ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۸ ۴) ۷۲

۲– تابع لگاریتمی و لگاریتم

تابع $y=a^x(a\neq 1,a>0)$ یک به یک است بنابراین وارون پذیر است. نمودار وارون آن را نسبت به خط $y=x$ رسم می کنیم و آنرا f^{-1} می نامیم و با نماد $y=log_a^x$ معرفی می کنیم.

مثال ۱. وارون توابع $y=3^x$ و $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ را بنویسید و نمودار آنها را رسم کنید.

$y=3^x\rightarrow$

$y=\left(\frac{1}{5}\right)^x\rightarrow$

مثال ۲. عبارات زیر را با نماد لگاریتم بنویسید:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

الف) $7^3 = 343 \rightarrow$ ب) $4^0 = 1 \rightarrow$

ج) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \rightarrow$ د) $5^1 = 5 \rightarrow$

ه) $2^{-5} = \frac{1}{32} \rightarrow$ و) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = 1000 \rightarrow$

مثال ۳. با توجه به یافتن تابع لگاریتمی از روی تابع نمایی دامنه تابع $f(x) = log_{B(x)}^{A(x)}$ را تعیین کنید.

مثال ۴. دامنه توابع زیر را به دست آورید:

الف) $y = log_{(2-x)}^{(x+1)}$

ب) $y = log_{(4-x^2)}^{(x^2-9)}$

ج) $y = \log(x^2 - 2x + 1)$

د) $y = \sqrt{log_{0/5}^{(x+1)}}$: $log_{0/5}(x+1) \geq 0 \Rightarrow 0 < x+1 \leq 1 \rightarrow -1 < x \leq 0 \Rightarrow$

$D_y = (-1, 0]$

$y = \sqrt{log_3(2x-4)}$: $log_3(2x-4) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{2}{5}, \infty\right)$ $\begin{cases} 2x-4 > 0 \rightarrow x > 2 \\ 2x-4 \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow x \geq 2/5$

مثال۱: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$A) y = 2^x$

$B) y = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$C)\ y = \log_2 x$

$D)\ y = \log_{\frac{1}{2}} x$

مثال ۵. درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) لگاریتم عدد صفر برابر یک است.

ب) $(m,n) \in f(x) = a^x \Leftrightarrow (n,m) \in f^{-1}(x) = log_a^x$

ج) در تابع $f(x) = \sqrt{2}^x$ داریم $f^{-1}(8) = 6$

د) نمودار تابع $y = log^{(x+10)}$

ه) $a > b > 0 \ \Rightarrow \ log_{\frac{1}{2}}^a > log_{\frac{1}{2}}^b$

تمرین در کلاس

۱. در هر قسمت مقدار a را به دست آورید.

الف) $log_{\frac{1}{2}}^{(x+1)} = 3$

ب) $log_{(x-1)}^{64} = 3$

ج) $log_2^{32} = x^2 + 1$

۲. حاصل عبارات زیر را به دست آورید :

الف) $log\, 0/001 = \cdots$ ب) $log_{25}^{\frac{1}{5}} = \cdots$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ج) $log_3^{\sqrt{3}} = \cdots$ د) $log_{25}\sqrt[4]{125} = \cdots$

۳. نمودار توابع $y = log_3^x$ و $g = log_{\frac{1}{3}}^x$ را رسم کنید و با یکدیگر مقایسه کنید.

۴. الف) خط $y = 25$ نمودار تابع $y = 5^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ب) خط $y = 100$ نمودار تابع $y = (0/1)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ج) خط $y = -4$ نمودار $y = log_{0/5}^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

د) خط $y = -16$ نمودار تابع $y = 2^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ه) نمودار دو تابع $y = 2^{-x}$ و $y = log_{0/5}^x$ یکدیگر را در چه نقطه یا نقاطی قطع می‌کنند؟

۵. نمودار هر یک توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

الف) $y = -2^x - 1$

ب) $y = log_3^{(x-2)}$

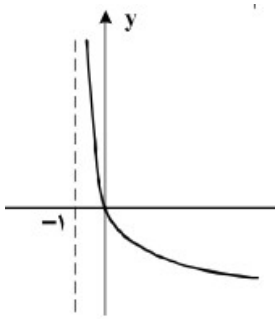
ج) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

د) $y = 1 - log_{\frac{1}{2}}^x$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۶. در چه بازه‌ای نمودار تابع $y = 2^x$ بالای نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد؟ (هر نمودار را در یک دستگاه رسم کنید)

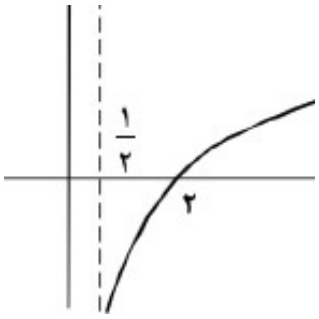
۷. شکل روبرو نمودار $y = log_2\ U(x)$ است. $U(x)$ کدام است؟



۱) $x + 1$ ۲) $x - 1$

۳) $(x+1)^{-1}$ ۴) $1 - x$

۷. شکل روبرو نمودار $y = -1 + log_b\ (2x + a)$ است. این منحنی خط $y = 1$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟



۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

۸. درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) تابع $y = log_{\frac{1}{2}}^{x}$ محور y ها را قطع می‌کند.

ب) از تساوی $log_{a}^{x} = \log(y-1)$ نتیجه می‌گیریم که $x - y + 1 = 0$ (با شرط $a \neq 1, a > 0$)

ج) نمودار $y = log_2|x|$ تابعی یک‌به‌یک است. د) با شرط $x > 0$; $logx^2 = log^2 x$

۳– ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

در این مبحث به بیان و اثبات روابط و ویژگی های لگاریتم می پردازیم.

1) $a^0 = 1 \implies log_a^1 = 0$ $(a > 0\ ,\ a \neq 1)$: $log_2^1 = 0$

2) $a^1 = a \implies log_a^a = 1$ $(a > 0\ , a \neq 1)$ مثال : $log_5^5 = 1$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

3) $log_c(A \times B) = log_c^A + log_c^B$: $A > 0\ ,\ B > 0\ ,\ c > 0, c \neq 1$

اثبات:

$$\left.\begin{matrix} log_c A = x \Longrightarrow c^x = A \\ log_c B = y \Longrightarrow c^x = B \end{matrix}\right\} \Longrightarrow A \times B = c^x \times c^y = c^{x+y} \Longrightarrow \ldots$$

4) $log_c(\frac{A}{B}) = \log_c A - \log_c B$; $A_{\text{و}} B_{\text{و}} C > 0$ و $C \neq 1$

اثبات:

$$\left.\begin{matrix} log_c A = x \Longrightarrow c^x = A \\ \log_c B = y \Longrightarrow c^y = B \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{A}{B} = \frac{c^x}{c^y} = c^{x-y} \Longrightarrow \ldots$$

۵) $log_{10} A = \log A$ اگر لگاریتمی مبنا نداشت، مبنای آن ۱۰ است.

6) $log_c A^m = m \times log_c A$, $log_{c^n} A = \frac{1}{n} \times log_c A$, $log_{c^n} A^m = \frac{m}{n} log_c A$

7) $A^{log_A B} = B$

8) $A^{log^C{}_B} = C^{log^A{}_B}$

9) $log^A{}_B \times log^B{}_c \times log^c{}_D = log^A{}_D$; $log^A{}_B = \frac{1}{log^B{}_A}$

مثال۱.حاصل را بنویسید :

الف) $\log 5 = \log\frac{10}{2} = log10 - log2 = 1 - log2 \Longrightarrow log5 = 1 - log^2$

ب) $log_3 15 = log_3\ 3 \times 5 = log_3 3 + log_3 5 = 1 + log_3 5$

ج) $\log\sqrt[3]{20} = \log 20^{\frac{1}{3}} = \log(10 \times 2)^{\frac{1}{3}} = {}^1/_3\ (\log 10 + \log 2) = {}^1/_3 - {}^1/_3\ log^2$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

د) $\log 0/25 = \log\frac{25}{100} = log\frac{1}{4} = log1 - log4 = 0 - \log 2^2 = -2log2$

ه) $\log 1/5 =$

و) $\log\sqrt[5]{50} =$

ز) $\log 2 \times \sqrt{8} =$

ح) $log\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt{20}} =$

ط) $log_8(9x+1) = ?$ $\Leftarrow$ $(0/4)^{2x-1} = (\frac{125}{8})^{x^2}$ (تجربی۹۸) اگر

مثال۲. اگر $\log 2 \simeq 0/3$, $\log 3 \simeq 0/4$ باشد مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید:

الف) $\log(15 \times \sqrt{45}) =$ $\log(20 \times \sqrt{54}) = ?$

$\text{Log}\,(3^2 \times 5^{\frac{3}{2}}) = \log 3^2 + \frac{3}{2}\log 5 = 2\log 3 + \frac{3}{2}(1 - log2) = 2\log 3 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}log2 =$

$2 \times 0/4 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \times 0/3 = 0/8 + 0/7 \times 1/5 = 0/8 + 1/05 = 1/85$

$15 \times \sqrt{45} = 3 \times 5 \times (45)^{\frac{1}{2}} = 3 \times 5 \times (3^2 \times 5)^{\frac{1}{2}} = 3 \times 5 \times 3^{2\times\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = \cdots$

ب) $2log5 + 3log2 - 4log3 = logA \Rightarrow A = ?$ $2\log 3 - 3\log 4 = ?$

$2log5 + 3log2 - 4log3 = log5^2 + log3^2 - log3^4 = log\frac{25\times 8}{81} = \cdots$

ج) $\log_3 2 \simeq 0/6 \Rightarrow \log_2 12 = ?$ $\log_5 3 \simeq 0/6 \Rightarrow \log_2 \frac{0}{75} = ?$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\mathbf{Log_2\,12} = log_2(2^2 \times 3) = log^{2^2}{}_2 + log^3{}_2 = 2\log_2 2 + \frac{1}{\log_3 2} = \cdots$$

د) $\log_{20} 24 = ?$ $\Longrightarrow \frac{\log 24}{log20} = \frac{log^{2^3\times 3}}{log^{2^2\times 5}} = \frac{log^{2^3}+log3}{log^{2^2}+log5} = \frac{2log2+log^3}{2log2+1-log2} = \cdots$

$$log^A{}_B = \frac{log^A{}_c}{log^A{}_c}$$

ه) $10^{1/3} = ?$ $10^{1/3} = 10^1 \times 10^{0/3} = 10 \times 10^{log^2} = 10 \times 2 = 20$

$$A^{log^B{}_A} = B$$

و) $log_2 12 = d \Longrightarrow 4^{d-2} = ?$ (خارج ۹۶)

$$log_2 12 = d \Longrightarrow 2^d = 12 \Longrightarrow \left(2^d\right)^2 = 12^2 \Longrightarrow 4^{d-2} = 144 \div 4^2 \Longrightarrow \frac{4^d}{4^2} = 9$$

اگر b و a ریشه‌های معادله $x^2 - 10x + 0/1 = 0$ باشد حاصل را بیابید: (تجربی ۸۸)

ز) $loga + logb - \log(b + a) = ?$

$a \times b = \frac{c}{a} = 0/1$ و $a + b = -\frac{b}{a} = 10$

$$loga + logb - \log(a + b) = \log(a \times b) - \log(a + b) = \cdots$$

ح) (تجربی ۹۰) $log2 = k \Longrightarrow \log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5}) = ?$

$$\log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 - 2\sqrt{5}) = \log(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) = \cdots$$

ط) (تجربی ۹۰) $log5 = 3k \Longrightarrow log\sqrt[3]{1/6} = ?$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰- درست و نادرست را تعیین کنید:(تمام لگاریتم ها تعریف شده‌اند)

الف) $\log(A+B)=\log A\times\log B$

ب) $\frac{\log A}{\log B}=\log\frac{A}{B}$

د) $2<\log 153<3$

ج) $\log^n A=\log A^n$

ه) $\log_B\sqrt[n]{A^m}=\log_{n_B}A^m$

ح) $\log 3_{0/5}<0$

و) $\log^3{}_2\times\log^2{}_3=1$

ز) $10^{1-2\log 3}=\frac{1}{1/8}$

ط) $\log^{(x^2+1)}>0$

۲- اگر $\log 2=a$ و $\log 3=b$ و $\log 7=c$ باشد حاصل را بدست آورید:

الف) $\log_8\sqrt{49}=?$

ب)(تجربی۸۱): $\log_b a=\frac{3}{2}\implies \log_{\sqrt{b}}ab^2=$

ج)(تجربی۸۶) $\log^3+\log\sqrt[4]{3}=\log(81)^k\implies \log_2\frac{5}{k}=?$

د)(ریاضی۹۰) $\log_8 2\ \sqrt[3]{0/25}=A\implies \log_4(\frac{1}{A}-1)=?$

۳- تابع $f(x)=\log_3(ax+b)$ فقط برای مقادیر $x\in(-\frac{1}{2}$ و $+\infty)$ با معنی است. اگر $f(4)=2$ باشد آن گاه $f\left(-\frac{4}{9}\right)=?$ (ریاضی۹۰)

۴- نمودار $f(x)=-2+(\frac{1}{2})^{Ax+B}$ نمودار $y=x^2-x$ را در دو نقطه به طول های 2 و 1 قطع می کند.؟ $f(3)=$
(ریاضی۹۷)

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

حل معادله و نامعادله های لگاریتمی

۱- برای حل معادله $\log_B A(x) = C$ کافی است مطابق تعریف لگاریتم به معادله توانی تبدیل کنیم و x را بیابیم یعنی :

$$\log_B A(x) = C \implies B^C = A(x)$$

۲- برای حل معادله شامل لگاریتم ابتدا به کمک قوانین لگاریتم دو طرف تساوی را تبدیل به یک لگاریتم می کنیم یعنی $\log_c A(x) = \log_c B(x)$ ، حتما باید بر مبناها برابر باشند و ضریب نداشته باشند. سپس لگاریتم ها را از دو طرف حذف می کنیم و مقدار x را می یابیم.

۳- در هر دو قسمت (1) و (2) جوابی از x قابل قبول است که باعث صفریا منفی شدن عبارت جلوی لگاریتم نمی شود.

مثال ۱- در هر قسمت مجموع جواب معادله‌های زیر را بدست آورید :

الف) $\log_2(2x+1) = 3 \implies 2^3 = 2x+1 \Rightarrow \cdots$

ب) $\log_3(x+5) = 1 + \log_3(3x+1)$

$$\log_3(x+5) = \log_3^3 + \log_3(3x+1) \Rightarrow \log(x+5) = \log_3^{3(3x+1)} \Rightarrow$$

ج) $\left(\text{تجربی ۹۳}\right)\ \log_x(x^2+4) = 1 + \log_x^5 \Rightarrow \log_2^x = ?$

$\log_x(x^2+4) = \log_x^x + \log_x^5 \Rightarrow \log_x(x^2+4) = \log 5x_x \Rightarrow x^2+4 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0$ $\begin{cases} x = 1 \longrightarrow \text{غ ق ق} \\ x = 4 \longrightarrow \text{ق.ج} \end{cases} \Rightarrow$

د) (خارج ۹۳) $\log_x(3x+8) = 2 - \log_x(x-6) \Rightarrow \log_4^x = ?$

ه) (خارج ۸۹) $\log_2^x = 1 + \log_2(y+1)$, $x^2 - y^2 = 32 \Rightarrow \log_4(x+y) = ?$

$$\log_2^x = 1 + \log_2(y+1) \Rightarrow \log_2^x = \log_2^2 + \log_2(y+1) \Rightarrow$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$log_2^x = log_2\, 2(y+1) \;\Rightarrow\; x = 2y+2 \;\Longrightarrow\; x = 2y+2$

$x^2 - y^2 = 32 \;\Longrightarrow (2y-2)^2 - y^2 = 32 \;\Longrightarrow\; 4y^2 + 8y + 4 - y^2 = 32$
$\Longrightarrow\; 3y^2 + 8y - 28$

$\Rightarrow\; (y+2)(3y+2) = 32 \;\Rightarrow 4 \times 8 = 32 \;\Rightarrow\; y+2 = 4 \;\Rightarrow\; y = 2 \;\longrightarrow\; x$
$= 2 \times 2 + 2 = 6 \longrightarrow\; x = 6 \;\Rightarrow\; log_4(2+6) = log_4^8 == \frac{3}{2} log_2^2 = \frac{3}{2} \times 1$

و) (تجربی ۹۱) $logx + \log(x-1) = 1 + log2 \;\Rightarrow\; x^2 + x = ?$

$logx + \log(x-1) = 1 + log2 \;\Rightarrow\; \log\, x(x-1) = log20 \;\Rightarrow$

$x(x-1) = 20 \;\Rightarrow\; x^2 - x - 20 = 0 \;\; (x-5)(x+4) = 0 \;\longrightarrow$

$x = -4\,, 5 \;\longrightarrow\; \begin{cases} x = -4 \\ x = 5 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x^2 + x \\ 25 + 5 \end{cases} = 30$

ز) (تجربی ۸۳) $log\frac{2}{x} + \log(1+x) = 1 \;\Rightarrow\; log_8^x = ?$

تمرین در کلاس

۱.مجموعه جواب معادله های زیر را به دست آورید.

الف) $log_2(5x+1) + log_2^x = 1$ (تجربی۸۰)

ب) $4\sqrt{2} = 4^x \;,\; 1 + log\sqrt{x+1} = logy \;\Rightarrow\; y = ?$ (تجربی۸۵)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ج) (تجربی ۹۶) $\begin{cases} 2^{x-1} \times 4^{x+y} \\ logy = 2log^3 + logx \end{cases} \Rightarrow y = ?$

د) (ریاضی۹۵) $log_2(2x^2+1) - \log_2(x+2) = 1 \Rightarrow \log_8(2x-1) = ?$

ه) $log_2(x^2-x-6) - log_2(x-3) = \log_2(2x-5) \Rightarrow \log_4 \sqrt[3]{x+1}$

و) $log_b^a + 3log_b^n = 3log_b(n-1) \quad \Rightarrow x = ? \qquad (n \in N\,, \quad b > 0\,, \ b \neq 1)$

ز) $log_x^{(3x+8)} = 2 - log_x^{(x-6)} \implies \log_{32} x = ?$

ح) $\log(y-x) + \log(4x+y) = 2$ و $\log(y+2) = 1 \implies x = ?$

ط) $(\log_2 m)^2 - \log_2 m^2 = 8$

ز) $\left(2^x - 3^{2\log_3 8}\right)\left(4^x - 5^{\log_{25} 8}\right) = 0$

2. دامنه تعریف توابع را به دست آورید.

الف) $y = \sqrt{log_{\frac{1}{5}}(2x+1)}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ب) $y = \sqrt{1 - \log(x^2 + 3x)}$

ج) $y = log_{(1-x^2)}(x^2 - 4)$

د) $y = \sqrt{log_2 \frac{x-2}{x+2}}$

ز) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - log_{\frac{1}{3}}(x-1)}}$

مثال۲: درست و نادرست را تعیین کنید.

A) $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$

B) $\log_2 x \div \log_2 y = \log_2 x - \log_2 y$

C) $\log_2 3^2 \times 2 = 2 \log_2 6$

D) $\log 5 = 1 - \log 2$

مثال۳: اگر $\log_2(x^2 - 4) = 2 + \log_2(x - 1)$ **حاصل** $\log_3(2x - 1)$ **را بیابید.**

مثال۴: دامنه توابع زیر را بیابید.

$f(x) = \sqrt{\log_2 (\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1))}$ $\quad\quad$ $g(x) = \log_{(2x+1)}(1 - x^2)$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

3. کدام راه حل درست است؟چرا؟

الف)
$$\begin{cases} 1) \quad log_3^x = 243 \Rightarrow 3^x = 243 \Rightarrow x = 5 \\ \text{یا} \\ 2) \quad log_3^x = 243 \Rightarrow 3^{243} = x \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} 1) \log(2x-1) = 0 \Rightarrow log2x - log^1 = 0 \Rightarrow log2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ log_A^1 \boxed{= 0} \\ 2) \log(2x-1) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 10 \Rightarrow 2x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{2} \end{cases}$$

کاربردهای لگاریتم

در این مبحث با چهار نوع کاربرد لگاریتم در قالب مثال هایی آشنا می شویم:

۱. آهنگ رشد یا زوال جمعیت ۲. اندازه گیری بزرگی زمین لرزه

۳. میزان باقیمانده ماده‌ای که نیمه عمر دارد ۴. محاسبه PH یک محلول.

مثال۱. تابع جمعیت جهان در انتهای هر سال به صورت $g(x) = 0/008 \times (1/01376)^x$ برآورد می شود .

الف)جمعیت جهان در سال ۲۰۱۶ تقریبا چقدر است؟

$$g(2016) = 8 \times 10^{-3} \times (1/01376)^{2016} = 7385074512$$

ب) درچه سالی جمعیت جهان به ۸ میلیارد خواهد رسید؟

۸ میلیارد $= g(t) = 8 \times 10^9$

$$8 \times 10^{-3} \times (1/01376)^t = 8 \times 10^9 \Rightarrow (1/01376)^t = 10^{12} \Rightarrow$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$\log(1/01376)^t = log_{10}^{10^{12}} \Rightarrow$

$t \log(1/01376) = 12 \Rightarrow t = \frac{12}{\log(1/01376)} = \frac{12}{0/005935} = 2021$

یعنی حدودا در سال ۲۰۲۱ جمعیت جهان به ۸ میلیارد می‌رسد.

مثال۲. جمعیت یک نوع باکتری برحسب زمان از رابطه $f(t) = 80 \times e^{0/03t}$ به دست می آید.

(t برحسب سال) در واقع ۸۰ مقدار اولی، ۳٪ نرخ رشد جمعیت در هر سال، $e \cong 2,718$ است.

الف)بعد از گذشت ۱۵ سال جمعیت چه قدر خواهد بود؟

$f(15) = 80 \times e^{\frac{3}{100} \times 15} = 80 \times (2718)^{0/45} =$

ب) بعد از گذشت چه زمانی سه برابر جمعیت اولیه را خواهیم داشت. $(log_e^3 \simeq 1/1)$

سه برابر مقدار اولیه (۸۰) یعنی ۲۴۰.

$f(t) = 80e^{0/3t} \Rightarrow 240 = 80e^{0/3t} \Rightarrow 3 = e^{0/3t} \Rightarrow$

$log_e^3 = log_e^{e^{0/3t}} \Rightarrow log_e^3 = 0/3\,t \Rightarrow 1/1 = 0/3\,t \Rightarrow t = \frac{1/1}{0/3} = \frac{11}{3}$ یعنی حدود ۳ سال و ۸ ماه جمعیت سه برابر خواهد شد.

نکته: اساس کار در مسایل رشد و زوال استفاده از رابطه $f(t) = kx^{\frac{t}{i}}$ است.

مثال۳. در لحظه شروع کشت ۱۰۰۰۰ باکتری داریم.اگر ضریب رشد $k = 0/4$ باشد، پس از چند دقیقه ۳۰۰۰۰ باکتری وجود دارد؟$(log_e^3 = 1/1)$. تعداد باکتری ها در دو دقیقه اول چقدر است؟

نکته: مقدار انرژی آزاد شده برحسب ارگ(Erg)از رابطه زیر حاصل می شود:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$log\, E = 1/5M + \frac{11}{8}$$

مثال۴. ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه و نماد میزان انرژی آزاد شده در زلزله است. اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر باشد.

الف)مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله $5/2$ ریشتری چقدر است؟

ب)اگر در یک زلزله $10^{17/8}$,ارگ انرژی آزاد شده باشد, زلزله چند ریشتری بوده است؟

ج) اگر یک ریشتر به یک زلزله M ریشتری افزوده شود,چه مقدار انرژی آزاد شده بیشتر می گردد؟

مثال۵. مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله $6/2$ ریشتری را محاسبه کنید.

مثال۶. اگر انرژی آزاد شده در یک زلزله $10^{19/3}$ ارگ باشد، بزرگی زلزله در واحد ریشتر چقدر است؟

مثال۷. نیمه عمر یک ماده هسته‌ای حدود ۲۰ سال است. اگر جرم نمونه‌ای از این ماده ۲۵ میلی گرم باشد، الف)رابطه بین t و مقدار جرم باقیمانده را بنویسید.

ب)بعد از گذشت چند سال جرم باقی مانده $2/5$ میلی‌گرم است.

ج)جرم باقی مانده بعد از گذشت چند ۶۰ سال چقدر است؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

د)بعد از گذشت چند سال جرم باقی مانده $0/5$ میلی‌گرم است؟

مثال۸. نیمه عمر یک نوع ماده هسته ای 40 سال است. نمونه ای از این ماده ۱۲۸ میلی گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟

مثال۹. نیمه عمر ماده‌ای شش روز و جرم اولیه آن یک گرم است.

الف)جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می‌ماند بیابید

ب)طی چند روز این جرم به $0/01$ گرم کاهش می‌یابد.

نکته: طبق تعریف، PH معیاری از میزان اسیدی، بازی (قلیایی)یا خنثی بودن یک محلول است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$PH = -log_{10}[H_3O^+]$$

در این رابطه $[H_3O^+]$ غلظت یون هیدرونیوم را نشان می دهد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۱۰.الف) PH هر یک از محلول های زیر را به دست آورید:

۱)در آب پرتقال غلظت یون هیدرونیوم $[H_3O^+]$ برابر $2/9 \times 10^{-2}$ مول بر لیتر است.

$(log29 \cong 1/39)$)در شربت معده غلظت یون هیدرونیوم برابر $2/5 \times 10^{-11}$ مول بر لیتر است.

$(log25 \cong 1/39$

۳)در آب خالص غلظت یون هیدرونیوم برابر 1×10^{-7} مول بر لیتر است.

اسیدی $PH < v$, بازی $PH > v$, خنثی $PH = v$



فصل ششم

حد و پیوستگی

۱- مفهوم حد و حدهای یکطرفه ۲- همسایگی و قضایای حد ۳- اعمال جبری روی حد ۴- رفع ابهام صفر صفرم ۵- پیوستگی در یک نقطه و پیوستگی در یک بازه

در این فصل با موضوع‌های زیر آشنا شده و به بررسی آنها می پردازیم.

1)مفهوم و فرایندهای حدی(به کمک رسم نمودار و مسائل مفهومی و همسایگی یک نقطه)

2) حدهای یک طرفه : (حد چپ و راست) 3) قضایای حد: (به کمک حدگیری می آیند)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا