خرید آنلاین در gajmarket.com

تمرین ..... صفحهٔ ۸ کتاب درسی

۱ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید.

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم‌علامت باشند داریم: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲ \Leftrightarrow \frac{x^۲+y^۲}{xy}\geq ۲ \Leftrightarrow x^۲+y^۲\geq ۲xy \Leftrightarrow x^۲+y^۲-۲xy\geq ۰ \Leftrightarrow (x-y)^۲\geq ۰$ (همواره درست است.)

دقت کنید که اگر x و y هم‌علامت نباشند، می‌توان ثابت کرد: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leq -۲$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

$$x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+zx \Leftrightarrow x^۲+y^۲+z^۲-xy-yz-xz\geq ۰ \Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲-۲xy-۲yz-۲xz\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x^۲-۲xy+y^۲)+(x^۲-۲xz+z^۲)+(y^۲-۲yz+z^۲)\geq ۰ \Leftrightarrow \underbrace{(x-y)^۲}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{(x-z)^۲}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{(y-z)^۲}_{\text{نامنفی}}\geq ۰$$ (همواره درست است.)

پ) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

$$x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y \Leftrightarrow x^۲+y^۲+۱-xy-x-y\geq ۰ \Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲-۲xy-۲x-۲y\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x^۲-۲xy+y^۲)+(x^۲-۲x+۱)+(y^۲-۲y+۱)\geq ۰ \Leftrightarrow \underbrace{(x-y)^۲}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{(x-۱)^۲}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{(y-۱)^۲}_{\text{نامنفی}}\geq ۰$$ (همواره درست است.)

۲ عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^۳<x^۲$.

$$x^۳<x^۲ \Leftrightarrow x^۳-x^۲<۰ \Leftrightarrow \underbrace{x^۲}_{\text{نامنفی}}(x-۱)<۰ \Leftrightarrow x-۱<۰ \Leftrightarrow x<۱$$

با توجه به رابطهٔ بازگشتی فوق، به ازای هر $x<۱$ که مخالف صفر باشد، نامساوی $x^۳<x^۲$ برقرار است.

به عنوان نمونه: $x=\frac{۱}{۲}$ ، $x=\frac{۱}{۱۰۰۰}$ ، $x=-۳$ و ... .

۳ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+۲\beta$ گنگ هستند.

الف) نشان می‌دهیم $\alpha-\beta$ گنگ است.

فرض خلف: فرض می‌کنیم $\alpha-\beta$ گنگ نباشد، بنابراین گویا است. در نتیجه:

$$\alpha-\beta=(\alpha+\beta)-۲\beta \Rightarrow ۲\beta=\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{گویا}}-\underbrace{(\alpha-\beta)}_{\text{گویا}}$$

در نتیجه ۲β گویا است و در نتیجه β نیز گویا است و این در تناقض با فرض گنگ بودن β است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

ب) نشان می‌دهیم $\alpha+۲\beta$ گنگ است.

فرض خلف: فرض می‌کنیم $\alpha+۲\beta$ گنگ نباشد، بنابراین گویا است. در نتیجه:

$$\alpha+۲\beta=(\alpha+\beta)+\beta \Rightarrow \beta=\underbrace{(\alpha+۲\beta)}_{\text{گویا}}-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{گویا}}$$

بنابراین β عددی گویا است و این در تناقض با فرض گنگ بودن β است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

@ciplbooks
قلمرو استفاده کلیه آثار تألیفی و تکثیری بوکز محفوظ شود