خرید آنلاین در gajmarket.com

ب) $a<b \Leftrightarrow a^۳<b^۳$

درست است. برای اثبات درستی، ابتدا باید نشان دهیم برای هر b و a عبارت $a^۲+ab+b^۲$ نامنفی است.

$$a^۲+ab+b^۲=\underbrace{a^۲+ab+\frac{b^۲}{۴}}_{(a+\frac{b}{۲})^۲}+\frac{۳b^۲}{۴}=\underbrace{(a+\frac{b}{۲})^۲}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{\frac{۳b^۲}{۴}}_{\text{نامنفی}}\Rightarrow a^۲+ab+b^۲\geq ۰$$

حال مسئلهٔ اصلی را اثبات می‌کنیم.

$$a^۳<b^۳\Leftrightarrow a^۳-b^۳<۰\Leftrightarrow (a-b)\underbrace{(a^۲+ab+b^۲)}_{\text{نامنفی}}<۰\Leftrightarrow a-b<۰\Leftrightarrow a<b$$

کار در کلاس

صفحهٔ ۸ کتاب درسی

الف) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن $n^۲$ هم‌ارزند؟ بله. ابتدا نشان می‌دهیم اگر n زوج باشد، $n^۲$ نیز زوج است. داریم:

$$n=۲k(k\in\mathbb{N})\Rightarrow n^۲=۴k^۲=۲\underbrace{(۲k^۲)}_{q\in\mathbb{N}}\Rightarrow n^۲=۲q$$

حالا نشان می‌دهیم اگر $n^۲$ زوج باشد، n نیز زوج است. برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض خلف: فرض می‌کنیم n زوج نباشد، بنابراین فرد است. داریم:

$$n=۲k+۱(k\in\mathbb{N})\Rightarrow n^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۲\underbrace{(۲k^۲+۲k)}_{q\in\mathbb{N}}+۱=۲q+۱$$

یعنی $n^۲$ فرد است که در تناقض با زوج بودن $n^۲$ است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

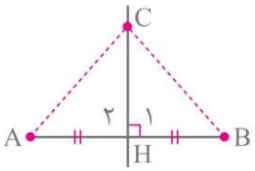
بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}\text{زوج } n\Rightarrow \text{زوج } n^۲\\ \text{زوج } n^۲\Rightarrow \text{زوج } n\end{array}\right\}\Rightarrow (\text{زوج } n\Leftrightarrow \text{زوج } n^۲)$$

ب) آیا دو گزارهٔ زیر هم‌ارزند؟

۱- نقطهٔ C روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. **۲- فاصلهٔ نقطهٔ C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.**

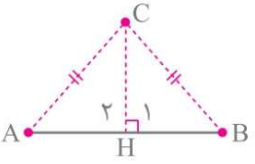
ابتدا فرض می‌کنیم نقطهٔ C روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد. در این صورت اگر از C به A و B وصل کنیم، داریم:



$$\left.\begin{array}{l}AH=BH\\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ\\ CH=CH\ (\text{مشترک})\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}}\overset{\Delta}{AHC}\cong\overset{\Delta}{BHC}\Rightarrow AC=BC$$

و این یعنی فاصلهٔ نقطهٔ C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.

حالا فرض می‌کنیم فاصلهٔ نقطهٔ C از دو سر پاره‌خط AB یکسان باشد. در این صورت اگر از C عمودی بر AB رسم کنیم، داریم:



$$\left.\begin{array}{l}AC=BC\\ CH=CH\ (\text{مشترک})\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وض}}\overset{\Delta}{AHC}\cong\overset{\Delta}{BHC}\Rightarrow AH=BH$$

و این یعنی H وسط AB است و در نتیجه CH عمودمنصف AB است و C روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

چون از درستی یک گزاره، درستی گزارهٔ دیگر نتیجه می‌شود، بنابراین این دو گزاره هم‌ارزند.

@cipbooks
فیلم از استفاده حضار کانال سی ای پی بوکز عضو شوید