خرید آنلاین در gajmarket.com

کار در کلاس ..... صفحهٔ ۶ کتاب درسی

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است.

فرض خلف: فرض کنیم $\frac{۱}{x}$ گنگ نباشد، پس عددی گویا است. با توجه به اینکه $\frac{۱}{x}$ غیرصفر است و معکوس هر عدد گویای غیرصفر عددی گویاست، $x = \frac{x}{۱}$ گویا است و این متناقض با فرض گنگ بودن x است، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

ب) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی g در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

فرض خلف: فرض کنیم تابع $f+g$ در $x=a$ پیوسته باشد، در این صورت در $x=a$ داریم:

$g = \underbrace{f+g}_{\text{پیوسته}} - \underbrace{f}_{\text{پیوسته}} \xrightarrow{\text{قضیه‌ای در حسابان}}$ g پیوسته است.

و پیوسته بودن g در $x=a$ متناقض با فرض ناپیوسته بودن g در $x=a$ است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مثال ..... صفحهٔ ۶ کتاب درسی

ترکیب دوشرطی $a=b \Leftrightarrow a^۳=b^۳$ ، $(a, b \in \mathbb{R})$ درست است ولی ترکیب دوشرطی $a=b \Leftrightarrow a^۲=b^۲$ درست نیست (چرا؟)

اگر $a=b=۰$ باشد، حکم به‌وضوح برقرار است، در غیر این صورت:

$$a=b \Leftrightarrow a-b=۰ \Leftrightarrow (a-b)(a^۲+ab+b^۲)=۰\times(a^۲+ab+b^۲) \Leftrightarrow a^۳-b^۳=۰ \Rightarrow a^۳=b^۳$$

بنابراین ترکیب دوشرطی $a=b \Leftrightarrow a^۳=b^۳$ درست است.

دقت کنید عبارت $a^۲+ab+b^۲$ مثبت است، زیرا:

$$a^۲+ab+b^۲=(a+\frac{b}{۲})^۲+۳\frac{b^۲}{۴} \xrightarrow{a,\ b\neq ۰} a^۲+ab+b^۲>۰$$

$$a^۲=b^۲ \Rightarrow a^۲-b^۲=۰ \Rightarrow (a-b)(a+b)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a-b=۰ \Rightarrow a=b \\ \text{یا} \\ a+b=۰ \Rightarrow a=-b \end{cases}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، از درستی $a^۲=b^۲$ لزوماً درستی $a=b$ نتیجه نمی‌شود، در واقع ممکن است داشته باشیم:

$$a^۲=b^۲ \Rightarrow a=-b$$

بنابراین ترکیب دوشرطی $a=b \Leftrightarrow a^۲=b^۲$ درست نیست.

کار در کلاس ..... صفحهٔ ۷ کتاب درسی

اگر $a, b \in \mathbb{R}$ کدام‌یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

الف) $a<b \Leftrightarrow a^۲<b^۲$

نادرست است، زیرا از درست بودن $a<b$ لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت $a^۲<b^۲$. به مثال نقض زیر توجه کنید.

$$\left.\begin{array}{l} a=-۱ \Rightarrow a^۲=۱ \\ b=۰ \Rightarrow b^۲=۰ \end{array}\right\} \Rightarrow (a<b \not\Rightarrow a^۲<b^۲)$$