خرید آنلاین در gajmarket.com

کار در کلاس ..... صفحهٔ ۵ کتاب درسی

الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲+b^۲$ زوج است.

روش اول: چون ab عددی فرد است، a و b هر دو فرد هستند، یعنی $a=۲k+۱\,(k\in\mathbb{N})$ و $b=۲k'+۱\,(k'\in\mathbb{N})$.

در این صورت:

$$a^۲+b^۲=(۲k+۱)^۲+(۲k'+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱+۴k'^۲+۴k'+۱=۲(\underbrace{۲k^۲+۲k+۲k'^۲+۲k'+۱}_{q\in\mathbb{N}})=۲q$$

روش دوم: چون ab فرد است، بنابراین هم a و هم b فرد هستند. در نتیجه $a+b$ زوج و $۲ab$ نیز زوج خواهند بود. داریم:

$$a+b=۲k\ ,\ ۲ab=۲k'$$

$$a^۲+b^۲=(\underbrace{a+b}_{۲k})^۲-\underbrace{۲ab}_{۲k'}\Rightarrow a^۲+b^۲=۴k^۲-۲k'=۲(\underbrace{۲k^۲-k'}_{q\in\mathbb{N}})=۲q$$

ب) $A=\{۳,۴\}$ یک زیرمجموعه از مجموعهٔ $S=\{۱,۲,\cdots,۶\}$ است و $n\in S$، اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n\in A$.

ابتدا نشان می‌دهیم اگر مربع عددی زوج باشد، خودِ آن عدد نیز زوج است. از اثبات به روش برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض خلف: فرض می‌کنیم خودِ عدد زوج نباشد، در این صورت فرد است. پس:

$$n=۲k+۱\,(k\in\mathbb{N})\Rightarrow n^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۲(\underbrace{۲k^۲+۲k}_{q\in\mathbb{N}})+۱=۲q+۱\Rightarrow$$ فرد است.

فرد بودن $n^۲$ در تناقض با زوج بودن مربع عدد است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

حالا مسئلهٔ اصلی را اثبات می‌کنیم:

اثبات: فرض می‌کنیم $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=۲k\,(k\in\mathbb{N})$، در این صورت:

$$(\frac{n(n+۱)}{۲})^۲=۲k\xrightarrow{\text{طبق اثبات بالا}}\frac{n(n+۱)}{۲}=۲k'\,(k'\in\mathbb{N})\Rightarrow n(n+۱)=۴k'$$

یعنی ضرب دو عدد متوالی n و $n+۱$ بر ۴ بخش‌پذیر است. چون دو عدد طبیعی متوالی نسبت به هم اول‌اند، بنابراین دو حالت رخ می‌دهد:

حالت ۱) $n=۴q\,(q\in\mathbb{N})$؛ در این صورت: $n=۴q\xrightarrow{n\in S}n=۴\Rightarrow n\in A$

حالت ۲) $n+۱=۴q'\,(q'\in\mathbb{N})$؛ در این صورت: $n=۴q'-۱\xrightarrow{n\in S}n=۳\Rightarrow n\in A$

در هر دو حالت نتیجه می‌شود $n\in A$.

مثال ..... صفحهٔ ۶ کتاب درسی

اگر $(a_۳-b_۳)(a_۲-b_۲)(a_۱-b_۱)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هرسه عامل $a_۱-b_۱$، $a_۲-b_۲$ و $a_۳-b_۳$ هم باید فرد باشند (چرا؟)

زیرا حاصل‌ضرب چند عدد صحیح، زمانی فرد است که تک‌تک آن اعداد فرد باشند.