

فصل چهارم

مثلثات

۱- یادآوری سال دهم و رادیان ۲- نسبت‌های مثلثاتی زویای دیگر ۳- نمودار توابع $y = sinx$ و $cosx$

۱- یادآوری:

در سال گذشته مباحث زیر را یاد گرفتید:

۱) دایره مثلثاتی(دایره واحد) و ویژگی های آن. ۲)نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

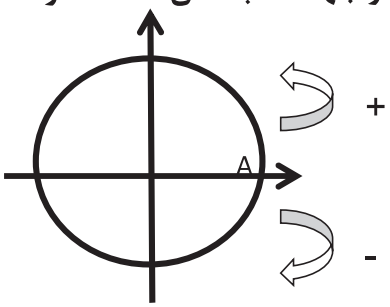
۳) نسبت های مثلثاتی برخی زوایای مهم از قبیل: 0° ، 30° ، 45° ، 60° ، 90° ، 180° ، 270° ، 360°

۴) روابط بین نسبت های مثلثاتی ۵) مساحت چند شکل هندسی ۶) شیب خط و $\tan\alpha$

از هر قسمت چند مثال:

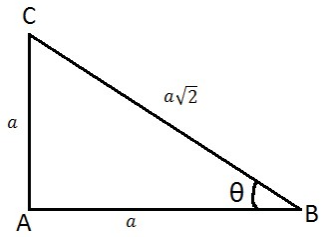
مثال۱) دایره مثلثاتی را تعریف کنید.

دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع واحد و جهت دار که شروع از A می باشد و جهت مثبت آن خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است.



مثال۲) در یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه ، نسبت های مثلثاتی زاویه ی ساق و قاعده را بیابید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



$$\sin\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$$

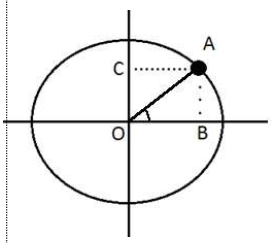
$$\cos\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$$

$$\tan\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a} = 1 = \tan 45^\circ \rightarrow \cot\theta = 1$$

مثال۳) مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید.

الف) $A = \sin 30 \times \cos 180 + \sin 180 \times \cos 30 = \frac{1}{2} \times (-1) + 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$

ب) $B = \tan 60 + 2\cot 30 - \sin 90 = \sqrt{3} + 2 \times \sqrt{3} - 1 = 3\sqrt{3}$



مثال۴) اگر $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ **و** α **در ناحیه چهارم باشد ، سایر نسبت های مثلثاتی را بدست آورید.**

می دانیم که در دایره مثلثاتی اگر $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ **باش، آنگاه :** $OC = \cos\theta$ **و** $OB = 1$**،** $OA = \sin\theta$

با توجه به مطالب بالا داریم:

$$\cos\alpha = \frac{2}{5} = x \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + y^2 = 1 \rightarrow y^2 = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \rightarrow |y| = \frac{\sqrt{21}}{5} \rightarrow y$$

$$= \pm\frac{\sqrt{21}}{5} \xrightarrow{\text{ناحیه در چهارم}} y = -\frac{\sqrt{25}}{5}, \tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{25}}{5}}{\frac{2}{5}} = -\frac{\sqrt{21}}{2}, \cot\alpha = -\frac{2}{\sqrt{25}}$$

مثال۵) با توجه به دایره مثلثاتی حدود $\cos\theta$ **و** $\sin\theta$ **را بدست آورید.**

$-1 \le \cos\theta \le 1$ **و** $-1 \le \sin\theta \le 1$

مثال۶) مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۶ سانتیمتر، چند برابر مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع ۴ سانتیمتر است؟

1 $S_\Delta = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C \Rightarrow \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 60 = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\text{②}\ S_{\bigcirc} = 6 \times \left(a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = a^2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 16 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \text{①, ②}\ \frac{9\sqrt{3}}{24\sqrt{3}}$$

مثال ۷) درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) $\sin\theta + \cos\theta = 1$ ب) $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$ ج) $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

و) $\tan\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ه) $\sin(\propto + \beta) = \sin\propto + \sin\beta$ و) $\sin(90 - \alpha) = \cos\alpha$

ز) $\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$

در سال یازدهم مباحث زیر را در مورد مثلثات مورد بررسی قرار می‌دهیم.

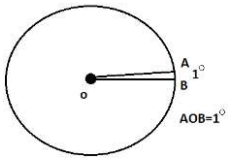
۱) واحدهای زاویه (درجه و رادیان)

۲) نسبت‌های مثلثاتی $\pi K \pm \alpha$ و $K\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ و $\alpha + \beta$ بر حسب αوβ $(k \in z)$

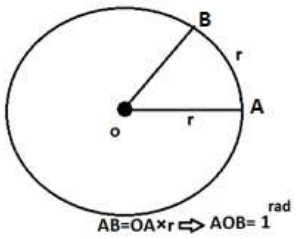
۳) توابع مثلثاتی (تابع سینوس و نمودار آن و ویژگی ها - تابع کسینوس و نمودار آن و ویژگی ها)

۴) برخی کاربردهای مثلثاتی در حل مسائل

۱. واحد های زاویه:

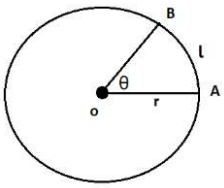


الف) درجه : اگر دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، به یک قسمت آن درجه گفته می شود.



ب) رادیان : زاویه ای که اندازه ی کمان روبرو به آن برابر شعاع دایره باشد را یک رادیان می گوییم.

با توجه به این تعریف اندازه ی زاویه ی θ بر حسب رادیان که طول کمان رو به رو به آن زاویه l و شعاع دایره r باشد ، از رابطه زیر بدست می آید:



$$\theta^{rad} = \frac{l}{r} = \frac{AB}{r}$$

نکته: **اگر D اندازه زاویه ای بر حسب درجه و R اندازه آن بر حسب رادیان :**

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۱) یک رادیان چند درجه است؟

ب) یک درجه چند رادیان است؟

مثال۲) زوایای زیر را بر حسب درجه بدست آورید:

$$\text{الف) } \frac{\pi}{20}^{rad} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\frac{\pi}{20}}{\frac{\pi}{1}} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{20} \rightarrow D = 9^{\circ}$$

روش دیگر: به جای π ، ۱۸۰ قرار میدهیم. یعنی:

$$\frac{\pi}{20} \Longrightarrow \frac{180}{20} = 9^{\circ}$$

$$\text{ب) } 6^{rad} \Longrightarrow \frac{D}{180} = \frac{6}{\pi} \Longrightarrow \pi D = 180 \times 6 \Longrightarrow D = \frac{180 \times 6}{\pi} = 345^{\circ}$$

$$\text{ج) } 15^{\circ} \Longrightarrow \frac{15}{180} = \frac{R}{\pi} \Longrightarrow 15\pi = 180R \Longrightarrow R = \frac{15\pi}{180} \rightarrow R = \frac{\pi}{12}$$

سوال: π برابر ۱۸۰ است یا تقریباً ۳/۱۴؟

π یک عدد حقیقی گنگ است که تقریب آنرا ۳/۱۴ در نظر می گیریم اما به لحاظ واحد اندازه گیری زاویه خواهیم داشت: π رادیان برابر است با ۱۸۰ درجه. یعنی:

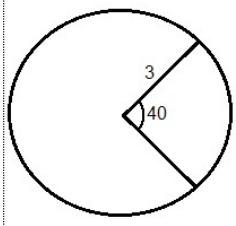
$$\frac{3}{14}^{rad} \simeq \pi^{rad} = 180^{\circ}$$

نکته: طول کمان AB و مساحت قطاع AOB از دایره به شعاع r از روابط زیر نیز بدست می‌آید:

$$\text{مساحت قطاع} = S = \pi R^2 \frac{\alpha^{\circ}}{360} \quad \text{و} \quad \text{طول کمان} = L = \pi r \frac{\alpha^{\circ}}{180}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

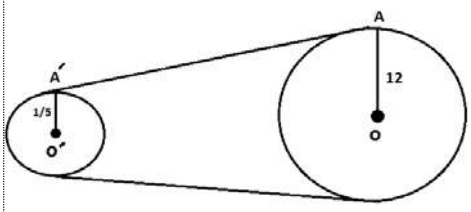
مثال ۲) در شکل روبرو اندازه‌ی زاویه α را برحسب رادیان بدست آورید؛ سپس طول کمان AB و مساحت قطاع کوچک آن را حساب کنید.



$$\frac{40}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow 180R=40\pi\Rightarrow R=\frac{40\pi}{180}=\frac{2\pi}{9}^{rad} \quad \text{و} \quad \theta=\frac{l}{\pi}\Rightarrow\frac{2\pi}{9}=\frac{l}{3}\Rightarrow l=\frac{2\pi}{3}$$

مثال۳) در دایره ای به شعاع ۴ س.م توسط زاویه ای θ کمانی به طول ۶ س.م بریده می شود. مقدار θ به رادیان چقدر است؟

مثال۴) در شکل مقابل وقتی قرقره بزرگتر $\frac{\pi}{4}$ رادیان بچرخد ، قرقره کوچکتر چند رادیان می چرخد؟



ابتدا مسافتی که قرقره بزرگتر طی می کند را حساب می کنیم. $l=PP'$

$$\theta=\frac{l}{r}\rightarrow\frac{\pi}{4}=\frac{l}{12}\rightarrow l=3\pi=\frac{9}{42}$$

به دلیل متصل بودن دو قرقره به یکدیگر، قرقره‌ی کوچک نیز همین مسافت را طی می کند؛ یعنی در قرقره کوچک داریم:

$$\theta=\frac{l}{r}\rightarrow\theta=\frac{3\pi}{\frac{1}{5}}=\frac{\frac{3\pi}{1}}{\frac{3}{2}}=2\pi\rightarrow\theta=2\pi^{rad}$$

یعنی وقتی قرقره بزرگتر $\frac{1}{8}$ دور ($\frac{\pi}{4}$) میچرخد، قرقره کوچکتر یک دور کامل می چرخد.

نکته: $\boxed{\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{r_2}{r_1}}$ پس: $\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{r_2}{r_1}\Rightarrow\frac{\frac{\pi}{4}}{\theta_2}=\frac{\frac{3}{2}}{12}\Rightarrow\theta=2\pi$

مثال۵) اندازه زاویه ای که عقربه ی ساعت شمار از ساعت ۱ بعد از ظهر تا ۴ بعد از ظهر حرکت می کند را بر حسب درجه و رادیان بیان کنید.

عقربه ساعت شمار از ساعت ۱ تا ۴ ، ۳ تا ۵ دقیقه حرکت می کند. هر یک دقیقه ، شش درجه است بنابرین $15\times 6=90$ حرکت کرده است.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}\rightarrow\frac{90}{180}=\frac{R}{\pi}\rightarrow R=\frac{90\pi}{180}=\frac{\pi}{2}rad$$ یعنی $\frac{\pi}{2}$ رادیان حرکت کرده است

مثال۶) زاویه ی بین عقربه های ساعت شمار ودقیقه شمار از چه رابطه ای بدست می آید؟ در ساعت h و M دقیقه

۱) زاویه عقربه شمار با عدد ۱۲: $0.5\times(M+60h)=\alpha$

۲) زاویه دقیقه شمار با عدد ۱۲: $6\times M=\beta$

۳) زاویه ی A بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار:

$$\widehat{A}=\alpha-\beta=5.5M-30h$$

مثال۷) چه مدت طول می‌کشد تا عقربه دقیقه شمار به اندازه‌ی $\frac{5\pi}{2}$ رادیان دوران کند؟

مثال۸) چرخ و فلکی ۴۰ کابین شماره گذاری شده دارد. اگر در آغاز حرکت از نقطه A خلاف عقربه های ساعت، شما روی کابین ۴ نشسته باشید ، بعد از $\frac{49\pi}{10}$ رادیان دوران ، شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید؟

مثال۹) در شکل فاصله ی بین دو تهران و مشهد تقریباً چندکیلومتر است؟(O مرکز زمین)

تهران : A و مشهد : B و $AB=6320$ و $A\widehat{O}B=10^{\circ}$

مثال۱۰) در یک مخروط، شعاع ۵ س.م و ارتفاع ۱۲ س.م می باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

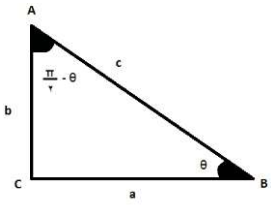
مثال۱۱) طول برف پاک کن جلوی اتومبیلی۳۵ س.م است. اگر برف پاک کن کمانی به اندازه ی ۱۲۰ درجه طی کند:

الف) اندازه کمان بر حسب رادیان چقدر است؟

ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک کن چقدر است؟

۲. نسبت های مثلثاتی برخی زوایا:

در سال قبل نسبت های مثلثاتی زوایای ۳۰ ، ۶۰ ، ۴۵ ،۰ ،۹۰ ، ۱۸۰ ، ۲۷۰ و ۳۶۰ درجه و علامت نسبت ها را در چهار ناحیه یاد گرفتید. جهت یاد آوری:



$$\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\cos(\theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots =$$

نکته: **در ناحیه اول دایره ی واحد، زوایا و نسبت‌های مثلثاتی آنها برای سینوس و تانژانت رابطه مستقیم دارند و در کسینوس و کتانژانت رابطه عکس دارند. مثلاً:**

$\sin 41° > \sin 30°$ و $\tan 20 > tan 10$ و $cos 90 < \cos 40°$ و $\cot 18° < \cot 17°$

نسبت های مثلثاتی زوایای مهم:

	0	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

Cos								
tan								
cot								

مثال: حاصل را بدست آورید.

$$A: \frac{\sin^2 30^\circ - 2\cos^4 30^\circ + \cos 180^\circ - \sin 360^\circ}{\tan^2 60^\circ - 3\cot 60^\circ + \sqrt{3}\tan 45^\circ - \tan 360} = \ \ldots$$

۳. نسبت‌های مثلثاتی $K\pi \pm \alpha$ (K عددی صحیح است)

۱) زاویه را به صورت مجموع و یا تفاضل مضرب صحیحی از 180° و α می‌نویسیم.
۲) مضرب صحیح و ۱۸۰ و علامت را حذف می‌کنیم ($\pi K\pm$) و نسبت را با α می‌نویسیم.
۳) علامت نسبت مثلثاتی زاویه‌ی اصلی سوال را در ناحیه‌ی مربوطه‌اش پشت نسبت مثلثاتی جواب می گذاریم.

مثال:

$\sin 240 = \sin(180 + 60) = -\sin 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 240 در ناحیه سوم است

$\cos(3\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ $3\pi - \alpha$ در ناحیه دوم است

$\tan(121\pi + \beta) = -\tan\beta$ مضارب زوج π همان 2π هستند و مضارب فرد π همان π هستند

نسبت های مثلثاتی $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$; (K فرد صحیح است)

۱) زاویه را به صورت مجموع و یا تفاضل مضرب صحیح فردی از $\frac{\pi}{2}$ و α می نویسیم.
۲) ($\frac{k\pi}{2} \pm$) را حذف و نسبت مثلثاتی متقابل آن را می نویسیم. یعنی $\sin \leftrightarrow cos$ و $\tan \leftrightarrow cot$
۳) علامت نسبت مثلثاتی صورت سوال را با توجه به زاویه‌ی اصلی پشت جواب می‌گذاریم.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: $\sin 250^\circ = \sin(270 - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$

$\cos 130^\circ = \cos(90 + 40^\circ) = -\sin 40^\circ$

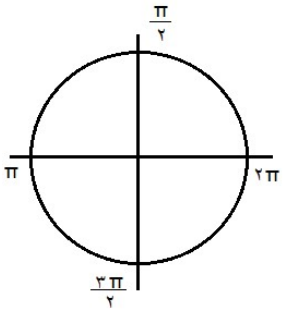
$\cot(\frac{125\pi}{2} + \alpha) = \left(\frac{124\pi + \pi}{2} + \alpha\right) = \tan\left(62\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$

مثال: حاصل؟

الف) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) =$

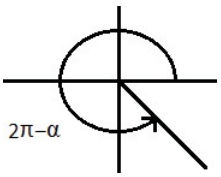
ب) $\cos(135^\circ) + \sin\left(405\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$

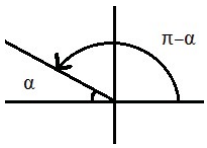
ج) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) - sin^3\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{97\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) =$

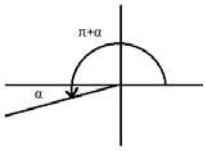


۶. علامت نسبت های مثلثاتی را در چهار ناحیه دستگاه مختصات تعیین کنید:

نسبت های مثلثاتی $\pi \pm \alpha$ و $2\pi \pm \alpha$ و بطور کلی $K\pi \pm \alpha$

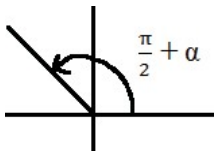






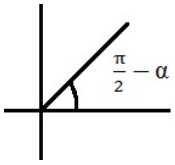
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

نسبت های مثلثاتی $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ و $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$



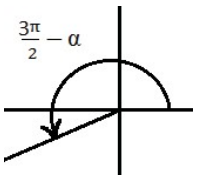
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$



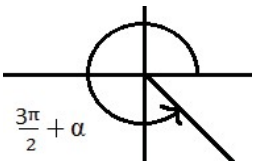
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$



$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) =$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) =$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) =$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) =$



$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = +\sin\alpha$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$

۴. بین نسبت های مثلثاتی روابط زیر برقرارند:

A: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

B: $\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$ $\tan\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

C: $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

D: $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ $1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۲) ۶ درجه چند رادیان است؟ ۳ رادیان چند درجه است؟

$$\frac{D}{180}=\frac{3}{\pi}\rightarrow D=\frac{180\times3}{\pi}=172^{\circ}\quad \frac{6}{180}=\frac{R}{\pi}\rightarrow R=\frac{6\pi}{180}\xrightarrow{rad} R=\frac{\pi}{30}\ rad$$

مثال۳) زوایای زیر کاربرد بیشتری دارند. در دایره ی مثلثاتی جایگاه آنها را تعیین کنید.

$$\pi=\qquad \frac{\pi}{2}=\qquad \frac{\pi}{4}=\qquad \frac{\pi}{8}=\qquad \frac{3\pi}{4}=$$

$$\frac{7\pi}{4}=\qquad \frac{\pi}{3}=\qquad \frac{\pi}{6}=\qquad \frac{\pi}{12}=\qquad \frac{5\pi}{3}=\qquad \frac{7\pi}{6}=$$

مثال۴) حاصل را بدست آورید.

$$A=\sin\frac{121\pi}{3}+\cos\left(18\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$$\sin\frac{121\pi}{3}=\sin\left(\frac{120\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(40\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\cos\left(18\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos 60$$

$$B:\sin(\alpha-3\pi)+\tan\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha-\cot\alpha$$

$$\sin(\alpha-3\pi)=-\sin\alpha\quad ,\ \tan(\frac{11\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$$

مثال۵) اگر $\tan 15=\frac{0}{28}$ باشد، حاصل عبارت زیر را بیابید.(زوایا درجه‌اند) (تجربی ۹۴)

$$A=\frac{\cos 285-\sin 255}{\sin 525-\sin 105}=\cdots$$

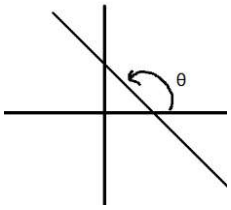
مثال۶) اگر $\tan\theta=\frac{0}{2}$ باشد ، مقدار $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}$ را بیابید.(ریاضی ۹۱)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال۷. مقادیر ممکن برای x را بیابید. $\cos(40^\circ + x) = sinx$

مثال۸. مقادیر ممکن برای x را بیابید. $\cos(25^\circ + x) = -sinx$

نکته: اگر خط **l** با محور **Ox** زاویه ی **θ** در جهت مثبت مثلثاتی بسازد، در این صورت شیب خط **l** برابر است با $\tan\theta$ یعنی:



y=mx+b

m= tan θ

مثال۵) خط **l** با محور **Ox** زاویه $\frac{5\pi}{6}rad$ می سازد. شیب خط را بدست آورید.

$$m = \tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{6\pi - \pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

توابع مثلثاتی:

هر تابعی که متغیر در جایگاه زاویه‌ی نسبت مثلثاتی قرار بگیرد را تابع مثلثاتی نامند.

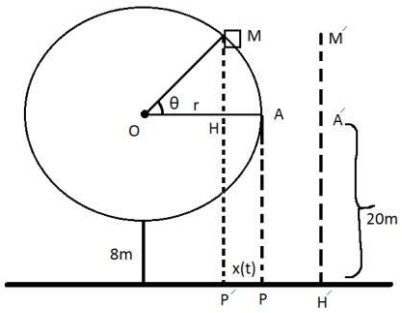
مثال۶) حاصل را بیابید.

$$f(x) = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - cos6x + 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) - cos\frac{6\pi}{6} + 1 = -2sin120^\circ - (-1) + 1 = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \cdots$$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا



مثال۷) فرض کنید چرخ و فلکی به قطر ۲۴متر داریم که هر ۴ دقیقه یک دور در جهت مثبت می چرخد. اگر پایین ترین نقطه چرخ و فلک ۸ متر بالای زمین باشد و کابین خاصی از چرخ و فلک را در نظر گرفته باشیم که در لحظه t = ۰ در نقطه ی A باشد و روبه بالا در حال حرکت است.الف) در هر لحظه ارتفاع کابین از سطح زمین را مشخص کنید. ۱. پس از گذشت t ثانیه ، کمانی که کابین طی می کند چند رادیان است؟

۲. تابعی بنویسید که ارتفاع کابین را نسبت به زمان نشان دهد.

ارتفاع کابین = M´H´= H´A´+A´M´ $h(\theta)=20+12\sin\theta$

A´H´=12+8=20 OMH: $\sin\theta=\frac{MH}{OM}=\frac{MH}{12}\Rightarrow MH=12\sin\theta$ $\theta=\frac{\pi t}{120}$

جواب الف : $h(t)=20+12\sin\frac{\pi t}{120}$

ب) اگر در لحظه ی t فاصله سایه این کابین روی زمین تا نقطه P را با $x(t)$ نمایش دهیم ، تابع آن:

$$x(t)=PP'=AH=OA-OH=12-12\cos\theta\ ,OMH:\ \cos\theta=\frac{OH}{12}\rightarrow OH=12\cos\theta$$

$$\Rightarrow x(\theta)=12-12\cos\theta\ \text{ و }\ \theta=\frac{\pi t}{120}\quad\Longrightarrow\boxed{x(t)=12-12\cos\frac{\pi t}{120}}$$

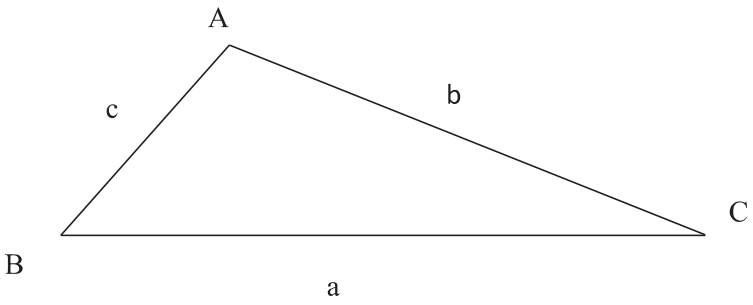
ج) اگر کابین از نقطه ی A ، زاویه ی $\frac{7\pi}{6}$ رادیان طی کند ، ارتفاع کابین و طول سایه را بیابید.

قانون کسینوس‌ها:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تعمیم یافته ی قضیه ی فیثاغورس در مورد تمام مثلث ها به صورت زیر است که روابط آن به قانون کسینوس ها معروف است.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos\widehat{C}$$



دستور مساحت‌ها:

مساحت مثلث ABC با توجه به معلوم بودن طول دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها :

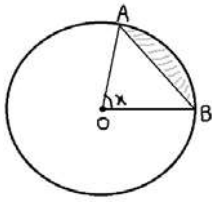
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}cb\sin\widehat{A}$$

قانون سینوسها:

به کمک دستور مساحت‌ها (مساوی قرار دادن رابطه های بالا) رابطه زیر را بدست می‌آید:

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$$

مثال۱۲) وتر AB به سمت مرکز دایره در حال حرکت است. (x برحسب رادیان) الف) تابعی بسازید که مساحت قطاع دایره را بر حسب x نمایش دهد.



ب) تابع تغییرات وتر بر حسب x را به دست آورید. $AB = \sqrt{2r^2(1-cosx)}$

مساحت قطاع $= \frac{1}{2}r^2x$ و مساحت مثلث $= \frac{1}{2}r \times r \times sinx$

$$S = \frac{1}{2}r^2x - \frac{1}{2}r^2sinx \Longrightarrow$$

$AB^2 = r^2 + r^2 - 2r.r.cosx \rightarrow AB^2 = 2r^2cosx \Rightarrow$

$$AB = r\sqrt{2(1-cosx)} \quad \text{و} \quad S(x) = \frac{1}{2}r^2(x - sinx)$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

با توجه به جدول روبرو نمودار سینوس به شکل زیر است:

مثال: نمودار توابع $y = sinx + 1$ و $g = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ و $t = -sin2x$ و $h = 2sinx$ را رسم کنید.

ویژگی‌ها: (در تمام نکات $k \in \mathbb{Z}$)

۱- دوره تناوب ان $T = \frac{2\pi}{|\text{ضریب ایکس}|}$ یعنی نمودار تابع $y = sinx$ در فاصله 2π تکرار می‌شود.

۲- نمودار، محور طول‌ها را در نقاط $x = k\pi$ قطع می‌کند. در واقع صفرهای تابع $2k\pi$ است.

۳- مقدار ماکزیمم تابع در نقاطی به طول $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ است که برابر با یک است.

۴- مقدار مینیمم تابع در نقاطی به طول $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ است که برابر با منفی یک است.

مثال: نکات ۱ الی ۴ را در مورد تابع $f(x) = 2sin\left(\frac{x}{5}\right) - 1$ بررسی و تعیین کنید.

رسم نمودار تابع کسینوس

با توجه به جدول روبرو نمودار کسینوس به شکل زیر است:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: نمودار توابع $y = sinx + 1$ و $g = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ و $t = -sin2x$ و $h = 2sinx$ را رسم کنید.

ویژگی‌ها:

۱- دوره تناوب ان $T = \frac{2\pi}{|\text{ضریب ایکس}|}$ یعنی نمودار تابع $y = cosx$ در فاصله 2π تکرار می‌شود.

۲- نمودار، محور طول‌ها را در نقاط $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ قطع می‌کند. یعنی صفرهای تابع $2k\pi$ است.

۳- مقدار ماکزیمم تابع در نقاطی به طول $x = 2k\pi$ است که برابر با یک است.

۴- مقدار مینیمم تابع در نقاطی به طول $x = (2k + 1)\pi$ است که برابر با منفی یک است.

مثال: نکات ۱ الی ۴ را در مورد تابع $f(x) = -\frac{1}{2}cos(-2x) + 1$ بررسی و تعیین کنید.

مثال: به روش رسم نمودار مقدار تقریبی $sin2$ و $sin2^\circ$ و $cos\sqrt{2}^\circ$ و $cos5$ را تعیین کنید.

مثال: به روش رسم مجموعه جواب معادلات را بیابید:

الف) $0 = |cosx| - 1 \quad : \quad [-2\pi, 2\pi]$ ب) $2sinx + 1 = 0 \quad : \quad [-\pi, \pi]$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ج) $4 = sinx + 2$: $[-4\pi , 2\pi]$ د) $2cosx - \sqrt{3} = 0$: $[-\pi , 2\pi]$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید:

الف) $y = -|sinx| + 1$ $[0 , 2\pi]$ ب) $y = 2\sin(\frac{\pi}{2} + x) + 1$ $[-\pi , \pi]$

ج) $y = [sinx] - 1$ $[-2\pi , 2\pi]$ د) $y = \begin{cases} \sin(-x) & [0 , \pi] \\ -cosx & [-\pi , 0] \end{cases}$

کار در کلاس

۱) نمودار توابع زیر را رسم کنید:

$A) \ y = \frac{1}{2} + |\cos x|$ $[0, 2\pi]$

$B) \ y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $[0, 2\pi]$

$C) \ y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

$D) \ y = -\sin 2x + 1$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲) درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) $\cos x$ یعنی کسینوس زاویه ای از دایره مثلثاتی که اندازه ی آن x درجه باشد.

ب) $\sin\sqrt{2}$ یک عدد حقیقی است. ج) $\sin 2 = \sin 2^\circ$

د) اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد ، آنگاه $-1 < \cos x < 0$

هـ) عددی می توان یافت که کسینوس آن $\frac{3}{2}$ باشد.

و) همواره داریم $|\sin x| \leq 1 \, , |\cos x| \leq 1$

ز) $x = -\frac{\pi}{2}$ صفر تابع $y = \cos x$ می باشد و $x = 0$ صفر تابع $y = \sin x$ است.

ح) همواره داریم $(k\epsilon z)$ $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$

ط) $\sin(\pi + \theta) - \sin\theta = 0$ ی) $\sin(\alpha + \alpha) = 2\sin\alpha$

۳) مقدارهای مثلثاتی زیر را بدست آورید.

$A)\ \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) =$

$B)\ \tan 225^\circ + \cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) =$

$C)\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) =$

۷) اگر $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$ باشد ، مقدار زیر را بدست آورید. (تجربی ۹۵)

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) =?$

۸) اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد ، مقدار زیر را بدست آورید. (تجربی ۹۶)

$\tan\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} =?$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) حاصل را بدست آورید. (A: تجربی ۹۴ و B: ریاضی ۹۱)

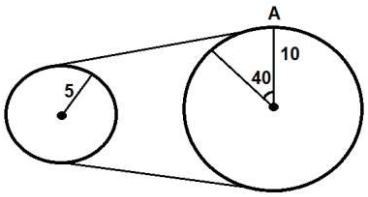
$$A)\ \tan 15 = 0/28 \rightarrow \frac{\cos 285 - \sin 255}{\sin 525 - \sin 102} = ?$$

$$B)\ \tan\theta = 0/2 \rightarrow \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi + \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = ?$$

$$C)\ \frac{\sin 91^\circ + \sin 92^\circ + \cdots + \sin 179^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ + \cdots + \sin 89^\circ} =$$

$$D)\ \tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{2\pi}{7} + \tan\frac{3\pi}{7} + \cdots + \tan\frac{6\pi}{7} =$$

۱۰) در شکل اگر نقطه A ، ۴۰ درجه جابه جا شود، چرخ کوچکتر چند درجه جابه جا می‌شود؟



۱۱) نقاط برخورد دو تابع $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ و $y = 1 - |sinx|$ را به کمک رسم نمودار بیابید.

۱۲) مقادیر $\sin 5^\circ$, $\cos 7^\circ$, $\cos 0^\circ$, $\cos 85^\circ$, $\sin 100^\circ$, $\sin 5$ را با رسم نمودار بیابید.

۱۳) زاویه قطاع حاصل از گسترده‌ی مخروطی با شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۱۰واحد چند رادیان است؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴) حاصل عبارت $A = \frac{|\sin x - \cos x|}{2} + \frac{\sin x + \cos x}{2}$ به ازای $x \epsilon \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ را بدست آورید.

۱۵) مساحت قطاعی از دایره به شعاع ۵ سانتیمتر که طول کمان آن $\frac{3}{2}$ است را بیابید.

۱۶) حاصل را بیابید.

$$A) \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$$

$$B) \tan(\alpha - 13\pi) \cdot \cot(87\pi + \alpha) - \cos(16\pi - \alpha) \cdot \cos(\alpha - 36\pi) =$$

$$C) \cot 34^\circ = 1/5 \rightarrow \frac{2\sin 326^\circ + 3\sin 56^\circ}{\cos 304} =$$

۱۷) نمودار توابع زیر را رسم کنید و دوره تناوب آنها را تعیین کنید.

$$A) y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$B) y = -\cos\frac{x}{3} + 1$$

$$C) y = cos^2 x$$

$D) \left|2sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{3}$ و $\frac{1}{2} = cosx + 1 \Rightarrow$ مجموعه جواب x دربازه $[-\pi, 2\pi]$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۸) ساده شده کسر رو به رو را بدست آورید. (ریاضی۹۱)

$$\frac{(1+\tan^2 x)(1+\cot^2 x)}{1-\sin^2 \alpha-\cos^4 x}=?$$

۱۹) دامنه ی توابع زیر را بدست آورید. نمودار قسمت (B) و (C) را رسم کنید.

$$A) y=\frac{1}{[\cos \pi x]}$$

$$B)\ y=\frac{\sin x}{\sin x} \qquad C)\ y=\frac{\cos x}{\cos x}$$



فصل پنجم

توابع نمایی و لگاریتم

۱-تابع نمایی ۲-تابع لگاریتمی و لگاریتم ۳-ویژگی های لگاریتم و معادلات لگاریتمی

۱-توابع نمایی و لگاریتم

در این فصل ابتدا با تابع نمایی و نمودار آن و ویژگی‌های این تابع و کاربردهایی از آن آشنا می‌شویم. سپس با تابع لگاریتم و نمودار آن و قوانین آن و چند مورد از کاربرد لگاریتم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

الف) **تابع نمایی**: هر تابع با نمایش جبری $f(x)=\mathrm{a}^{\mathrm{x}}$ که در آن $a \neq 1$ و $a>0$ را یک تابع نمایی می‌نامیم.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا