



عبارت های گویا



$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$(b, d \neq 0)$

ریاضی

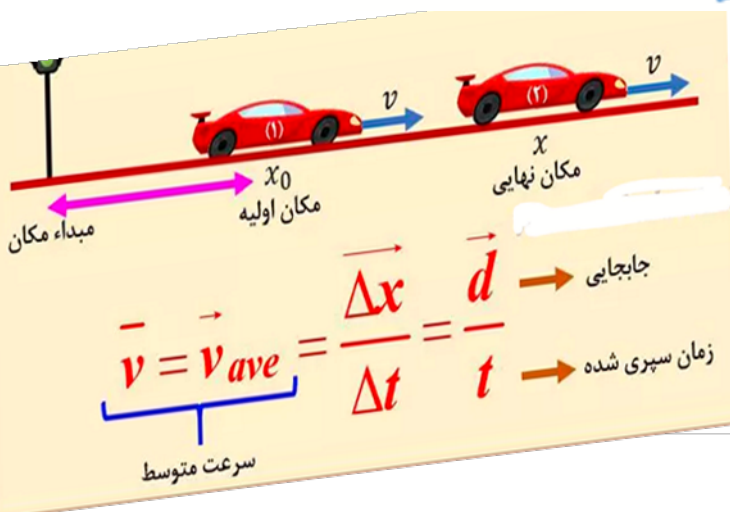
پایه نهم
دوره اول متوسطه

درسنامه خودآموز به زبان ساده و روان
همراه مثال های فراوان و نمونه سوالات امتحانی
به همراه پاسخ نامه تشریحی

تهیه و تنظیم : علی مصطفی

کانال ریاضی متوسطه اول

@riazisaeedamini



فصل ۷ عبارت‌های گویا

درس اول: معرفی و ساده کردن عبارت‌های گویا ۱

تعریف عبارت گویا ۱

حوزه تعریف یا دامنه عبارت گویا ۳

ساده کردن یک عبارت گویا ۶

سوالات امتحانی درس اول ۱۰

درس دوم: محاسبات عبارت‌های گویا

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا ۱۲

جمع و تفریق عبارت‌های گویا ۱۵

ساده کردن عبارت‌های مرکب ۲۰

سوالات امتحانی درس دوم ۲۳

پاسخ تشریحی سوالات امتحانی ۲۶



علی مصطفی دبیر ریاضی
متوسطه

@riazisaeedamini

تعریف

هر کسری که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشد، یک عبارت گویا است. به عبارت دیگر نسبت دو چندجمله ای را یک عبارت گویا گوییم.

در فصل پنجم با یک جمله ای ها و چند جمله ای ها آشنا شدیم. و یک جمله ای را اینگونه تعریف کردیم:

یک یا چند متغیر با توان های صحیح نامنفی $\times$ یک عدد حقیقی = یک جمله ای

بنابراین ax^n فرم کلی یک جمله ای می باشد که در آن $n \in W$, $a \in \mathbb{R}$.

مثلاً $-3xy^2$, $\sqrt{2}m$ و $\frac{3}{5}$ همگی یک جمله ای هستند، حال اگر چند تا یک جمله ای با هم جمع و تفریق شوند، چندجمله ای شکل می گیرد. اگر کسری داشته باشیم که هم صورت و هم مخرج آن چند جمله ای باشند به آن کسر یک عبارت گویا می گوییم.

مثال ۱ عبارتهای زیر گویا هستند.

$$\frac{2x-5}{5x^3-2x^2+1} \text{ و } \frac{x+5}{x-1} \text{ و } \frac{-a}{4} \text{ و } \frac{2}{5} \text{ و } \frac{x-3}{4} \text{ و } \frac{x}{y} \text{ و } \frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{9xy}$$

$$\frac{1}{x} \text{ و } \frac{10}{x+2} \text{ و } \frac{3x+\sqrt{7}}{x^2} \text{ و } \frac{xy^2}{(x-y)^2} \text{ و } \frac{x^3}{1} \text{ و } \frac{-a}{b} \text{ و } x^2+2x-7$$

اما چه عبارتهایی گویا نیستند؟

- در عبارتهایی که متغیر
- ۱ زیر رادیکال باشد. مانند: $\frac{\sqrt{x}-5}{a-y}$, $\frac{3x}{\sqrt[3]{x}}$, $\frac{1}{\sqrt{x-5}}$
 - ۲ داخل قدرمطلق باشد. مانند: $\frac{|x+3|}{-2}$, $\frac{|5x|}{6xy}$, $|x-y|$
 - ۳ دارای توان غیر صحیح باشد. مانند: $\frac{x^{\frac{2}{3}}-2}{-5x}$, $\frac{-1}{x^{0/5}}$
 - ۴ به صورت توان یک عدد باشد. مانند: $\frac{3x+1}{4y}$, $\frac{-7}{5x+2xy}$

مثال ۲

گویا بودن و یا گویا نبودن عبارتهای زیر را بررسی کنید.

الف) $-۷ \rightarrow$ گویا استب) $\sqrt{x} \rightarrow$ گویا نیست (زیر رادیکال متغیر دارد)پ) $\frac{3x+4}{2x^2+4x+1} \rightarrow$ گویا استت) $\frac{3x-1}{x} \rightarrow$ گویا استث) $\frac{4x-1}{|x+y|} \rightarrow$ گویا نیست (داخل قدرمطلق متغیر دارد)ج) $\frac{5x+1}{\sqrt{5x+1}} \rightarrow$ گویا نیست (زیر رادیکال متغیر دارد)

نکته

در بیشتر مواقع لازم است کسرها را تا حد امکان ساده کرد، سپس درمورد گویا بودن و یا گویا نبودن آن بحث کنیم.

مثال ۳

الف) $\frac{|x^2|}{3x} = \frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3} \rightarrow$ یک عبارت گویا است.دقت کنید x^2 چون عددی مثبت است (مجذور یا توان دوم هر عددی همواره مثبت است) پس بدون تغییر از داخل قدرمطلق بیرون می آید، بنابراین عبارت بالا پس از ساده شدن یک عبارت گویا محسوب می شود.ب) $\frac{\sqrt[3]{5x^3}-x^2}{a-y} = \frac{\sqrt[3]{5(x)^3}-x^2}{a-y} = \frac{x\sqrt[3]{5}-x^2}{a-y} \rightarrow$ یک عبارت گویا است.

در این مثال نیز، با اینکه متغیر زیر رادیکال قرار دارد ولی می دانیم که توان سوم زیر رادیکال با ریشه سوم ساده شده و از زیر رادیکال خارج می شود. نکته ی مهم دیگر این است که $\sqrt[3]{5}$ یک عدد حقیقی است و در اینجا هیچ متغیری زیر رادیکال قرار ندارد. پس فراموش نکنید در عبارتهای گویا، اعداد می توانند زیر رادیکال باشند. ولی متغیرها پس از ساده شدن، نباید زیر رادیکال باشند.

مقدار عددی یک عبارت گویا

همانند روش به دست آوردن مقدار عددی یک عبارت جبری، در عبارتهای گویا نیز کافی است مقدارهای مورد نظر را به جای متغیر قرار داده و پس از ساده کردن، مقدار عبارت گویا را به دست آوریم.

مثال ۳

مقدار عددی عبارت گویای $\frac{x^2-3y}{y^2-1}$ را به ازای $x=4, y=-3$ به دست آورید.

به جای x عدد ۴ و به جای y عدد -۳ را جایگذاری می کنیم.

$$\frac{x^2-3y}{y^2-1} = \frac{(4)^2-3(-3)}{(-3)^2-1} = \frac{16+9}{9-1} = \frac{25}{8}$$

مثال ۴ هریک از عبارتهای زیر را به ازای مقادیر داده شده به دست آورید.

الف) $\frac{2x+1}{3x-1} = \frac{2(1)+1}{3(1)-1} = \frac{2+1}{3-1} = \frac{3}{2}$	$(x=1)$
ب) $\frac{-3x-1}{x+2} = \frac{-3(-\frac{1}{3})-1}{(-\frac{1}{3})+2} = \frac{1-1}{-\frac{1}{3}+\frac{6}{3}} = \frac{0}{\frac{5}{3}} = 0$	$(x=-\frac{1}{3})$
پ) $\frac{\sqrt{2}x+3y}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{8})+3(-2)}{(\sqrt{8})^2+(-2)^2} = \frac{\sqrt{16}-6}{8+4} = \frac{4-6}{12} = \frac{-2}{12} = \frac{-1}{6}$	$(x=\sqrt{8}, y=-2)$

حوزه تعریف یا دامنه عبارتهای گویا

می دانیم در ریاضیات کسرهای چون $\frac{1}{0}$ ، $\frac{-8}{0}$ و $\frac{0}{0}$ تعریف نشده یا نامعین هستند. چون در عبارتهای گویا متغیر می تواند در مخرج کسر قرار گیرد، ممکن است به ازای یک یا چند مقدار متغیر، مخرج کسر صفر شود، در این حالت می گوییم عبارت گویا **تعریف نشده** است.

به عنوان مثال عبارت گویای $\frac{7x+6}{x-3}$ به ازای $x=3$ تعریف نشده است زیرا اگر ما به جای متغیر x عدد ۳ را جایگذاری کنیم، مخرج کسر صفر می شود. ببینیم:

$$\frac{7x+6}{x-3} = \frac{7 \times 3 + 6}{3-3} = \frac{21+6}{0} = \frac{27}{0}$$

در مثال بالا ما به جای متغیر x هر عددی (یعنی کل اعدادی که می شناسیم=اعداد حقیقی) را می توانیم جایگذاری کنیم **به جز عدد ۳**. این جمله را به صورت ریاضی بدین شکل می نویسیم.

$$D = \mathbb{R} - \{3\}$$

یعنی هر عدد حقیقی به جز ۳

دامنه را با حرف D نشان می دهند. و عدد های که مخرج را صفر می کنند را داخل $\{ \}$ می نویسیم.

پس عددهای که با جایگذاری آن ها به جای متغیرها مخرج را صفر می کنند مشکل ساز هستند باید آن ها را پیدا کرده و آن ها را از کل اعداد حقیقی کم کنیم.

مثال ۵

عبارت گویای $\frac{5x^2-1}{(x+3)(x-7)}$ به ازای $x=7$ و $x=-3$ تعریف نشده است، چون مخرج کسر را صفر می کنند.

$$\text{الف) } (x=-3) \Rightarrow \frac{5x^2-1}{(x+3)(x-7)} = \frac{5(-3)^2-1}{(-3+3)(-3-7)} = \frac{45-1}{(0)(-10)} = \frac{44}{0} \rightarrow \text{تعریف نشده}$$

$$\text{ب) } (x=7) \Rightarrow \frac{5x^2-1}{(x+3)(x-7)} = \frac{5(7)^2-1}{(7+3)(7-7)} = \frac{245-1}{(10)(0)} = \frac{244}{0} \rightarrow \text{تعریف نشده}$$

برای تعیین همه مقدارهایی که بر اساس آن ها یک عبارت گویا تعریف نمی شود، باید قبل از ساده کردن عبارت گویا مخرج کسر را مساوی صفر قرار دهیم و سپس معادله به دست آمده را حل کنیم. جواب های به دست آمده از این معادله، همان ریشه های مخرج هستند یعنی به ازای آن ها مخرج صفر می شود. پس این مقدارها را از مجموعه اعداد حقیقی کم می کنیم. مجموعه ی به دست آمده همان دامنه عبارت گویا است.

$$D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه های مخرج}\}$$

مثال ۶

تعیین کنید عبارتهای گویای زیر به ازای چه مقادیری تعریف نشده هستند.

$$\text{الف) } \frac{x^2+5}{x+1} \quad \text{ب) } \frac{7x^3+9xy}{12} \quad \text{ج) } \frac{7}{(x+4)(2x-10)} \quad \text{د) } \frac{x-1}{x^2+4} \quad \text{ه) } \frac{x^2+4x}{x^2-5x+6}$$

پاسخ:

$$\text{الف) } \frac{x^2+5}{x+1} \xrightarrow{\text{مخرج مساوی صفر}} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \quad D = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\text{ب) } \frac{7x^3+9xy}{12} \quad \text{چون در مخرج هیچ متغیری وجود ندارد پس این کسر همواره تعریف شده است. (مخرج هیچ گاه صفر نمی شود)}$$

$$\text{ج) } \frac{7}{(x+4)(2x-10)} \xrightarrow{\text{مخرج مساوی صفر}} (x+4)(2x-10)=0$$

نکته

هرگاه حاصل ضرب چند عبارت یا پراکنش مساوی صفر شد، باید تک تک آن ها را مساوی صفر قرار داده و جواب همه آن ها را جداگانه به دست آورد.

$$A \times B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

در این جا حاصل ضرب دو پراتنز مساوی صفر شده، بنابراین باید هر دو پراتنز را مساوی صفر قرار داده و جواب آن ها را به دست آورد.

$$(x + 4)(2x - 10) = 0 \begin{cases} (x + 4) = 0 \Rightarrow x = -4 \\ (2x - 10) = 0 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R} - \{-4, 5\}$$

د) $\frac{x-1}{x^2+4}$ مخرج مساوی صفر $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$

آیا عددی را می شناسید که به توان دو برسد و جوابش -4 شود؟ قطعاً چنین عددی در مجموعه اعداد حقیقی وجود ندارد. توان دوم هیچ عددی منفی نمی شود. بنابراین مخرج این کسر به ازای هر عددی مثبت است و هیچ گاه صفر نمی شود. بنابراین $D = \mathbb{R}$

و) $\frac{x^2+4x}{x^2-5x+6}$ مخرج مساوی صفر $x^2 - 5x + 6 = 0$

در مثال بالا چون چندجمله ای مخرج از درجه ۲ می باشد، بهتر است آن را تجزیه کرده سپس جواب های آن را به دست آوریم.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-2)(x-3) = 0 \begin{cases} x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

جمع ضرب

$$D = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

نکته

برای اینکه مقدار یک عبارت گویا صفر شود، باید صورت آن عبارت را برابر صفر قرار داد.

مثال ۷ عبارتهای گویای زیر به ازای چه مقادیری برابر صفر هستند؟

الف) $\frac{x^2-9}{x^2-25}$ صورت مساوی صفر $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-3) = 0 \begin{cases} x+3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$

بنابراین به ازای دو عدد ۳ و -۳ مقدار عبارت گویای بالا مساوی صفر می شود. این بحث را با مبحث دامنه

اشتباه نگیرید.

$$\text{ب) } \frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 - 16} \Rightarrow x^2 + 3x - 28 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 7) = 0 \begin{cases} x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \end{cases}$$

در مثال بالا $x = 4$ جوابی غیر قابل قبول است. زیرا مخرج کسر را هم صفر می کند. بنابراین باید حذف شود.

$$\text{ج) } \frac{-13}{x-7} \Rightarrow -13 \neq 0$$

عبارت مقابل هیچ گاه صفر نمی شود.

ساده کردن یک عبارت گویا

ساده کردن یک عبارت گویا همانند ساده کردن یک عدد گویا است. ابتدا صورت و مخرج کسر را به کمک اتحادها و فاکتورگیری تجزیه کرده، سپس عامل های مشترک را از صورت و مخرج خط زده و حذف می کنیم.

$$\text{الف) } \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

اگر a, b, c عدد باشند و b, c مخالف صفر باشند. $b \neq 0, c \neq 0$

$$\text{ب) } \frac{A \times C}{B \times C} = \frac{A}{B}$$

اگر A, B, C چندجمله ای باشند و B, C مخالف صفر باشند. $B \neq 0, C \neq 0$

مثال ۸ عبارت های گویای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$\text{الف) } \frac{6xy}{8x^3} \xrightarrow[\text{به روش فاکتورگیری}]{\text{تجزیه صورت و مخرج}} = \frac{\cancel{2x}(3y)}{\cancel{2x}(x^3)} = \frac{3y}{x^3}$$

$$\text{ب) } \frac{9x^2 + 3x}{6x + 2} \xrightarrow[\text{به روش فاکتورگیری}]{\text{تجزیه صورت و مخرج}} = \frac{3x(\cancel{3x+1})}{2(\cancel{3x+1})} = \frac{3x}{2}$$

$$\text{ج) } \frac{9x^2 - 4y^2}{9x + 6y} \xrightarrow[\text{تجزیه مخرج با فاکتورگیری}]{\text{تجزیه صورت با اتحاد مزدوج}} = \frac{(\cancel{3x-2y})(\cancel{3x+2y})}{3(\cancel{3x+2y})} = \frac{(3x-2y)}{3}$$

$$\text{د) } \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x + 4} \xrightarrow[\text{با اتحاد جمله مشترک}]{\text{تجزیه صورت و مخرج}} = \frac{(x-3)(\cancel{x+2})}{(x+2)(\cancel{x+2})} = \frac{(x-3)}{(x+2)}$$

$$\text{و) } \frac{y^3 - 2y^2 - 3y}{y^2 + y} \xrightarrow[\text{مخرج تنها فاکتورگیری}]{\text{صورت فاکتورگیری و اتحاد جمله مشترک}} = \frac{y(y^2 - 2y - 3)}{y(y+1)} = \frac{\cancel{y}(y-3)(\cancel{y+1})}{\cancel{y}(y+1)} = \frac{y-3}{1} = y-3$$

مثال ۹ عبارت های گویای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\frac{6xy}{3x^2} = \frac{\cancel{3}x(2y)}{\cancel{3}x(x)} = \frac{2y}{x}$

ب) $\frac{x^2+10x+9}{x^2-1} = \frac{(x+1)(x+9)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+9}{x-1}$

پ) $\frac{x^2-13x+22}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x-11)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-11}{x+2}$

ت) $\frac{x-y}{y-x} = \frac{-(-x+y)}{(y-x)} = -1$

ث) $\frac{36x^2-16y^2}{12x-8y} = \frac{(6x-4y)(6x+4y)}{2(6x-4y)} = \frac{\cancel{2}(3x+2y)}{\cancel{2}} = 3x+2y$

نکته

۱- گاهی اوقات در صورت و مخرج عبارتهایی مشاهده می شوند که در آن ها جای جملات برعکس یکدیگرند. در مثال بالا قسمت (ت) از این دست می باشد. دقت داشته باشید که دو عبارت $x-y$ و $y-x$ قرینه یکدیگرند زیرا:

$$x-y = -(-x+y) = -(y-x)$$

$$y-x = -(-y+x) = -(x-y) \quad \text{یا}$$

پس هر وقت با این عبارتها مواجه شدید، به دلخواه در یکی از آن ها از یک منفی (-) فاکتور می گیریم تا با هم ساده شوند.

۲- میدانیم که جمع خاصیت جابجایی دارد یعنی $x+y$ و $y+x$ با هم برابرند.

مثال ۱۰ عبارت های گویای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\frac{x-3}{3-x} = \frac{x-3}{-(x-3)} = -1$

توجه کنید جملات در صورت و مخرج جایشان با هم عوض شده در مخرج از یک منفی فاکتور می گیرم و سپس عبارتها را باهم ساده می کنیم. دقت کنید هرگاه عبارتهای صورت و مخرج با هم قرینه باشند جواب کسر ۱- خواهد شد.

ب) $\frac{a+2}{-2-a} = \frac{a+2}{-(2+a)} = -1$

ج) $\frac{a^2-81}{9-a} = \frac{(a-9)(a+9)}{-(a-9)} = -(a+9)$ صورت را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می کنیم

در مخرج هم از یک منفی فاکتورگیری می کنیم تا با یکی از پرانتزهای صورت ساده شود.

نکته

توجه کنید ساده کردن عبارتهای گویا به شکل زیر کاملاً اشتباه است. اکثر دانش آموزان مرتکب چنین اشتباهی می شوند.

$$\frac{a+ax}{a} = a+x \quad (\text{غلط است}) \quad \text{یا} \quad \frac{a+ax}{a} = 1+x \quad (\text{غلط است})$$

ساده کردن یک عبارت گویا زمانی امکان پذیر است که حتماً صورت و مخرج به صورت ضرب دو یا چند عبارت چبری نوشته شوند و سپس عبارت را ساده کنیم.

$$\frac{a+ax}{a} = \frac{a(1+x)}{a} = 1+x$$

مثال ۱۰ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید تا تساوی برقرار شود.

الف) $\frac{3x}{x-3} = \frac{\boxed{}}{x^2-x-6}$

پاسخ: ابتدا باید همه صورت ها و مخرج ها را با اتحادها و فاکتورگیری تجزیه کرد، سپس با مقایسه صورت ها و مخرج ها با هم جاهای خالی را کامل می کنیم.

$$\frac{3x}{x-3} = \frac{\boxed{}}{x^2-x-6} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \frac{3x}{x-3} = \frac{\boxed{}}{(x-3)(x+2)} \longrightarrow \frac{3x}{x-3} = \frac{3x(x+2)}{(x-3)(x+2)}$$

پس از تجزیه مخرج کسر دوم، می بینیم که مخرج کسر اولی در عبارت $(x+2)$ ضرب شده است، بنابراین باید صورت هم در این عبارت ضرب شود.

ب) $\frac{x}{\boxed{}} = \frac{x^2-2x}{x^2-4} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \frac{x}{\boxed{}} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

می بینیم صورت در عبارت $(x-2)$ ضرب شده است. پس مخرج کسر اول را باید بدون این عامل بنویسیم.

$$\frac{x}{\boxed{(x+2)}} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

ج) $\frac{1}{5} \times \left(\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \right) = \frac{4x+7}{10} \quad \frac{1}{5} \times \left(\frac{\boxed{4x+7}}{\boxed{2}} \right) = \frac{4x+7}{5 \times 2}$

نکته

برای اینکه بدانیم دو عبارت گویا به ازای چه مقادیری باهم برابر می شوند، باید آن دو عبارت را مساوی هم قرار دهیم، سپس با مل معادله مقدار و یا مقادیری که دو عبارت را با هم مساوی می کند، به دست می آوریم.

مثال ۱۱

به ازای چه مقادیری دو عبارت گویای $\frac{3}{x+1}$ و $\frac{5}{2x}$ با هم برابرند؟

$$\frac{3}{x+1} = \frac{5}{2x} \Rightarrow 6x = 5(x+1) \Rightarrow 6x = 5x+5 \Rightarrow 6x-5x=5 \Rightarrow x=5$$

مثال ۱۲

دو عبارت گویای $\frac{3x+5}{x-4}$ و $\frac{3x-1}{x+1}$ به ازای چه مقادیری با هم برابرند.

$$\frac{3x+5}{x-4} = \frac{3x-1}{x+1}$$

طرفین وسطین می کنیم

$$(3x+5)(x+1) = (3x-1)(x-4)$$

پراترها را درهم ضرب می کنیم

$$3x^2 + 3x + 5x + 5 = 3x^2 - 12x - 1x + 4$$

عبارتهای متشابه را ساده می کنیم.

$$\Rightarrow 8x + 5 = -13x + 4$$

معادله به دست آمده را حل می کنیم

$$\Rightarrow 8x + 13x = -5 + 4$$

$$\Rightarrow 21x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{21}$$

سوالات امتحانی درس اول

پاسخ تشریحی در انتهای جزوه نوشته شده است.

۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) هر عدد گویا یک عبارت گویا به حساب می آید.

ب) $\frac{\sqrt{x^2}}{2y}$ یک عبارت گویا است.

ج) عبارت $\frac{x-3}{x+5}$ به ازای $x = -5$ تعریف نشده است.

د) ساده شدهی عبارت $\frac{x+xy}{y}$ برابر با $2x$ است.

۲- جاهای خالی را با اعداد و یا کلمات مناسب کامل کنید.

الف) کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد را ... گویند.

ب) به ازای عدد ... کسر $\frac{5-x}{3x-1}$ تعریف نشده است.

ج) ساده شدهی کسر $\frac{4-y^2}{y^2+y-2}$ برابر با کسر ... است.

د) عبارت $(x-y)$ قرینهی عبارت ... است.

۳- با توجه به تعریف عبارت گویا، مشخص کنید کدامیک از عبارتهای زیر گویا است؟

الف) $\frac{x+2}{5}$

ب) $\frac{\sqrt{x}}{2}$

ج) $\frac{14}{x}$

د) $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

هـ) $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}$

و) $\frac{x^2-x}{x+1}$

ز) $3x^2-1$

ح) $\sqrt{3}x+1$

ط) $\frac{|x|-1}{3}$

ی) $\frac{2^x-5}{3x-1}$

ک) $\frac{5^{\frac{1}{4}}-3^{1/5}}{2x+\frac{1}{2}}$

ل) $\frac{x^{1/5}-3}{\frac{2}{3}x}$

۴- مقدار عددی عبارت $\frac{x-3}{x+4}$ را به ازای $x = -2$ و $x = 3$ و $x = \frac{1}{5}$ به دست آورید.

۵- آیا می توان حاصل عبارت $\frac{2x+3}{x^2-1}$ را به ازای $x = -1$ به دست آورد؟ چرا؟

۶- هر یک از عبارت های زیر به ازای چه مقداری از x تعریف نشده است؟

الف) $\frac{2}{-3x}$

ب) $\frac{-5x+1}{x^2-x-2}$

ج) $\frac{4x}{2x-\frac{1}{2}}$

د) $\frac{x^2-7}{5}$

هـ) $\frac{x^2-1}{x^2-x}$

و) $\frac{2x-5}{x^2+3}$

۷- مقدار عددی عبارت های گویای زیر را به ازای $x = 3$ و $y = -5$ به دست آورید.

الف) $\frac{2x^2-x-3}{x+4}$

ب) $\frac{2xy+y+y^2}{2y+1}$

ج) $\frac{(1-y)(2x+1)}{2x^2y^2}$

۸- به ازای چه مقداری از m عبارت گویای $\frac{3m-1}{m+2}$ برابر با $\frac{5}{4}$ می گردد؟

۹- عبارت های گویای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{2a^2xy^2}{3x^2y^2}$

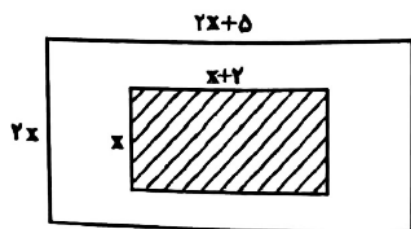
ب) $\frac{5x^2-10x}{x^2-4}$

ج) $\frac{3x^2-27}{x+3}$

د) $\frac{14a^2x \times 12by}{21b^2x \times 18a^3y}$

هـ) $\frac{x^2+2x-15}{x^2-5x+6}$

۱۰- در شکل زیر نسبت مساحت مستطیل هاشورخورده به مساحت کل شکل را به دست آورید.



محاسبات عبارت های گویا

ضرب و تقسیم عبارت های گویا

ضرب و تقسیم عبارت های گویا، همانند ضرب و تقسیم اعداد گویا می باشد.

در ضرب چند عبارت گویا

۱- تا جایی که امکان دارد صورت ها و مخرج ها را با استفاده از اتحادها و فاکتورگیری تجزیه می کنیم.

۲- عامل های یکسان را در صورت و مخرج با هم ساده می کنیم. (عامل صورت تنها با عامل مخرج ساده می شود.)

۳- در آخر صورت ها را در هم و مخرج ها را در هم ضرب می کنیم.

مثال ۱۳ حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \frac{8yx^2}{5} \times \frac{15y^2}{16x^3y^3} =$$

در این مثال تمام عبارتهای صورت و مخرج یک جمله ای هستند بنابراین ما ابتدا ضرایب عددی و سپس متغیرها را با هم ساده می کنیم.

$$\frac{\cancel{8}^1 y x^{\cancel{2}}_1}{\cancel{5}_1} \times \frac{\cancel{15}^3 y^{\cancel{2}}_2}{\cancel{16}^4 x^3 y^{\cancel{3}}_2} = \frac{1}{1} \times \frac{3}{2x} = \frac{3}{2x}$$

$$\text{ب) } \frac{x^2+9x+20}{x^2} \times \frac{x^3}{x+4} = \frac{(x+4)(x+5)}{1} \times \frac{x}{\cancel{x+4}} = \frac{x(x+5)}{1}$$

صورت اولی را با اتحاد جمله مشترک تجزیه می کنیم، همچنین x^3 صورت دومی را با x^2 مخرج کسر اولی ساده می کنیم. پس از تجزیه عامل های یکسان در صورت کسر اول و مخرج کسر دوم یعنی $x+4$ را خط زده بعد آن عبارتهای

باقیمانده را از رابطه ی $\frac{\text{صورت} \times \text{صورت}}{\text{مخرج} \times \text{مخرج}}$ به دست می آوریم.

مثال ۱۴ ضرب های زیر را انجام دهید.

الف)	$\frac{x+5}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+7x+10} = \frac{\cancel{x+5}}{1 \cdot \cancel{x^2}} \times \frac{x^{\cancel{2}}}{(\cancel{x+5})(x+2)} = \frac{x}{x+2}$
ب)	$\frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{y}{x^2} \cdot \frac{5}{y^5}}{\frac{5}{1} \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{z}{z}} \times \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{z^2}{z^2}}{\frac{1}{1} \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{y^2}{y^2}} = \frac{y}{1} \times \frac{\Delta x^2 z^2}{3} = \frac{\Delta x^2 y z^2}{3}$
ج)	$\frac{\Delta x+5}{x^2+12x+20} \times \frac{x^2+4x+4}{x^2-1} = \frac{\Delta(x+1)}{(x+2)(x+10)} \times \frac{(x+2)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{\Delta \times (x+2)}{(x+10)(x-1)} = \frac{\Delta x+10}{x^2+9x-10}$
د)	$\frac{x-1}{x+1} \times \frac{x^2+2x+1}{x^2+x-2} = \frac{\cancel{x-1}}{x+1} \times \frac{(x+1)^2}{(\cancel{x-1})(x+2)} = \frac{x+1}{x+2}$
و)	$\frac{x^2-y^2}{x+1} \times \frac{x^2+2x+2}{x-y} \times \frac{xy}{x+y} = \frac{(\cancel{x^2-y^2})(\cancel{x+1})(x+2)xy}{(\cancel{x+1})(\cancel{x^2-y^2})} = xy(x+2)$

در تقسیم چند عبارت گویا

۱- کسر اول را مثل خودش می نویسیم.

۲- تقسیم را به ضرب تبدیل می کنیم.

۳- کسر دوم را معکوس می کنیم.

۴- ادامه داستان همان ضرب دو عبارت گویاست که در بالا توضیح داده شده است.

$$\frac{2}{5} \div \frac{4}{35} = \frac{2}{5} \times \frac{35}{4} = \frac{7}{2}$$

همانند اعداد گویا عمل می کنیم:

مثال ۱۳ حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{5y^3}{3xz} \div \frac{10y^5}{9x^2} = \frac{5y^3}{3xz} \times \frac{9x^2}{10y^5} = \frac{3x^3}{2zy^2}$

ب) $\frac{5x-10}{x^2-x} \div \frac{x^2-4}{x^2-2x+1} = \frac{5x-10}{x^2-x} \times \frac{x^2-2x+1}{x^2-4} = \frac{5(x-2)}{x(x-1)} \times \frac{(x-1)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$

اتحاد جمله مشترک

فاکتورگیری

فاکتورگیری

اتحاد جمله مشترک

$= \frac{5(x-1)}{x(x+2)}$

ج) $\frac{x^2-49}{x^2+6x-7} \div \frac{7-x}{x+1} = \frac{x^2-49}{x^2+6x-7} \times \frac{x+1}{7-x} = \frac{(x-7)(x+7)}{(x-1)(x+7)} \times \frac{x+1}{-(x-7)}$

اتحاد مزدوج

فاکتورگیری از یک منفی

اتحاد جمله مشترک

$= \frac{x+1}{-(x-1)}$

مثال ۱۴ حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید.

الف	$\frac{15x^2}{4xy} \div \frac{25x^2}{16y^4} = \frac{15x^2}{4xy} \times \frac{16y^4}{25x^2} = \frac{3}{x} \times \frac{4y^3}{5x} = \frac{12y^3}{5x^2}$
ب	$\frac{x^2+4x+4}{x^2-9x} \div \frac{x^2+3x+2}{x-9} = \frac{x^2+4x+4}{x^2-9x} \times \frac{x-9}{x^2+3x+2} = \frac{(x+2)(x+2)}{x(x-9)} \times \frac{x-9}{(x+2)(x+1)} = \frac{x+2}{x} \times \frac{1}{x+1} = \frac{x+2}{x^2+x}$
پ	$\frac{(x+7)^2}{x^2-49} \div \frac{(3x-1)}{(x-7)} = \frac{(x+7)^2}{x^2-49} \times \frac{x-7}{3x-1} = \frac{(x+7)(x+7)}{(x+7)(x-7)} \times \frac{x-7}{3x-1} = \frac{x+7}{3x-1}$
ت	$\frac{8x^2-2}{x^2+4x+3} \div \frac{2x+1}{x+3} = \frac{2(4x^2-1)}{x^2+4x+3} \times \frac{x+3}{2x+1} = \frac{2(2x+1)(2x-1)}{(x+3)(x+1)} \times \frac{x+3}{2x+1} = \frac{2(2x-1)}{x+1} = \frac{4x-2}{x+1}$
ث	$\frac{x^2+3x-10}{x^2+2x-8} \div \frac{x^2+2x-24}{x^2-16} = \frac{x^2+3x-10}{x^2+2x-8} \times \frac{x^2-16}{x^2+2x-24} = \frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)(x+4)} \times \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+6)} = \frac{x+5}{x+6}$

مثال ۱۵ دو عبارت گویا بنویسید که حاصل ضرب آن ها $\frac{x+1}{x-1}$ شود.

پاسخ: باید دو عبارت گویا (دو کسر) بنویسیم که ضرب آن ها $\frac{x+1}{x-1}$ شود، برای این کار عبارت بالا را به این صورت می نویسیم. $\frac{x+1}{\square} \times \frac{\square}{x-1}$. کافی است در جاهای خالی دو چند جمله ای یکسان بنویسیم. مشخص است که می توان برای این سوال جواب های متفاوت و زیادی نوشت. به عنوان مثال:

$$\frac{x+1}{\boxed{2x}} \times \frac{\boxed{2x}}{x-1}, \quad \frac{x+1}{\boxed{x-8}} \times \frac{\boxed{x-8}}{x-1}, \quad \frac{x+1}{\boxed{x^2-4}} \times \frac{\boxed{x^2-4}}{x-1}$$

مثال ۱۶ اگر مساحت مستطیلی $S = x^2 - 25$ و طول آن $\frac{x^2 - x - 20}{x+4}$ باشد، عرض مستطیل را بر حسب x به دست آورید. ($x \neq -4$)

پاسخ: می دانیم مساحت مستطیل برابر است با طول ضرب در عرض. حال اگر مساحت و طول را داشته باشیم برای به دست آوردن عرض باید مساحت را بر طول مستطیل تقسیم کنیم.

$$\text{طول} \div \text{مساحت} = \text{عرض} \Rightarrow \text{عرض} \times \text{طول} = S \text{ مستطیل}$$

$$(x^2 - 25) \div \frac{x^2 - x - 20}{x+4} = \frac{(x^2 - 25)}{1} \times \frac{x+4}{x^2 - x - 20} = \frac{\cancel{(x-5)}(x+5)}{1} \times \frac{\cancel{x+4}}{\cancel{(x-5)}(x+4)} = x+5$$

اتحاد مزدوج تبدیل به ضرب و معکوس کسر دوم اتحاد جمله مشترک

جمع و تفریق عبارت های گویا

در جمع و تفریق عبارت های گویا همانند اعداد گویا باید مخرج مشترک بگیریم. یادمان نرود اگر صورت و مخرج یک کسر قابل ساده شدن باشد، حتما قبل از مخرج مشترک گیری باید آن کسر را ساده کنیم.

در جمع و تفریق عبارت های گویا همچون اعداد گویا دو حالت داریم.

۱- اگر مخرج کسرها مساوی باشند، یکی از مخرج ها را نوشته صورت ها با هم جمع یا تفریق می شوند.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B}, \quad B \neq 0$$

۲- اگر مخرج کسرها مساوی نباشند، با مخرج مشترک گیری جواب را به دست می آوریم.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD}, \quad D \neq 0, B \neq 0$$

به دست آوردن مخرج مشترک عبارتهای گویا

برای به دست آوردن مخرج مشترک یا همان ک.م.م دو یا چند مخرج، ابتدا همه مخرج ها را تجزیه می کنیم سپس از دستور زیر مخرج مشترک را به دست می آوریم.

عامل های غیرمشترب × عامل های مشترک با بیشترین توان = مخرج مشترک

مثال ۱۷ مخرج مشترک عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) اگر دو عبارت $5y$ و $3x$ مخرج دو کسر باشند آنگاه $15xy = 3x \times 5y =$ مخرج مشترک

زیرا $3 \times x$ و $5 \times y$ خود به صورت ضرب هستند و هیچ عامل آنها مشترک نیست (همه عامل ها غیر مشترک) هستند از اینرو باید همه عامل های غیر مشترک را در هم ضرب کرد.

ب) اگر دو عبارت x و $x+1$ مخرج دو کسر باشند چون باز هم x و $x+1$ دو عامل کاملاً متفاوت و غیر مشترک هستند پس مخرج مشترک آن ها هم می شود ضرب آن ها $x(x+1) =$ مخرج مشترک

دقت داشته باشید که $x+1$ یک عامل حساب می شود و نباید به اشتباه گفت که x و $x+1$ هر دو در عامل x مشترک هستند. زیرا در $x+1$ بین x و 1 جمع نوشته شده نه ضرب.

ج) مخرج مشترک دو عبارت $A = a^2 - 4$ و $B = a + 2$ به صورت زیر است. ابتدا $a^2 - 4$ را تجزیه می کنیم:

$$A = a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2)$$

$$B = a + 2$$

می بینیم که $a + 2$ عامل مشترک هر دو عبارت است یعنی در هر دو عبارت وجود دارد. بیشترین توانش هم یک است. از طرفی عامل $a - 2$ فقط در یک عبارت وجود دارد پس یک عامل غیر مشترک به حساب می آید.

$$\text{بنابراین} \quad \text{مخرج مشترک} = (a + 2) \times (a - 2)$$

عامل مشترک با بیشترین توان

عامل غیرمشترب

(د) مخرج مشترک دو عبارت $A = x^2 - 3x - 10$ و $B = x^2 + 6x + 8$ به صورت زیر خواهد بود:

$$A = x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$$

تجزیه هر دو عبارت با استفاده

$$B = x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$$

از اتحاد جمله مشترک

$$\text{مخرج مشترک} = (x + 2)(x - 5)(x + 4)$$

عامل مشترک

ضرب عامل های غیر مشترک

مثال ۱۸ حاصل جمع و تفریق های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$

ب) $\frac{3x-1}{x+2} + \frac{5x+4}{x+2} = \frac{8x+3}{x+2}$

ج) $\frac{5x+7}{x^2-3} - \frac{4x-9}{x^2-3} = \frac{5x+7-(4x-9)}{x^2-3} = \frac{x+16}{x^2-3}$

$$5x + 7 - (4x - 9) = 5x + 7 - 4x + 9 = x + 16$$

در مثال های روبرو مشاهده می شود که مخرج ها همه باهم برابر هستند. پس یکی از مخرج ها را می نویسیم سپس صورت ها را با هم جمع و یا تفریق می کنیم. در مثال آخر دقت کنید چون بین دو کسر تفریق می باشد پس در جواب، کل عبارت صورت کسر دوم قرینه خواهد شد.

مثال ۱۹ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{3}{a-3} - \frac{2}{a+4} = \frac{3(a+4) - 2(a-3)}{(a-3)(a+4)} = \frac{3a+12-2a+6}{(a-3)(a+4)} = \frac{a+18}{(a-3)(a+4)}$$

دقت کنید $a - 3$ و $a + 4$ دو عامل غیر مشترک هستند بنابراین مخرج مشترک همان حاصل ضرب دو عبارت می باشد. پس از آن که مخرج مشترک نوشته شد، طبیعتاً صورت های کسرها نیز تغییر خواهند کرد. برای به دست آوردن صورت ها از این طریق عمل می کنیم:

برای به دست آوردن صورت کسر اول، مخرج مشترک را بر مخرج اول تقسیم کرده جواب را در صورت آن کسر ضرب می کنیم. در مثال بالا

$$\frac{\text{مخرج مشترک}}{\text{مخرج کسر اول}} = \frac{(a-3)(a+4)}{a-3} = a+4$$

جواب به دست آمده را در صورت کسر اول ضرب میکنیم $3(a+4) = 3a+12$

حال جواب به دست آمده یعنی $a+4$ را در صورت کسر اول یعنی عدد ۳ ضرب می کنیم.

برای به دست آوردن صورت کسر دوم، مخرج مشترک را بر مخرج دوم تقسیم کرده جواب را در صورت آن کسر ضرب می کنیم.

$$\frac{\text{مخرج مشترک}}{\text{مخرج کسر دوم}} = \frac{(a-3)(a+4)}{a+4} = a-3$$

جواب به دست آمده را در صورت کسر دوم ضرب میکنیم $-2(a-3) = -2a+6$

سپس عبارتهای متشابه در صورت را با هم ساده می کنیم.

مثال ۲۰ حاصل جمع زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \frac{a^2-20}{a^2-4} - \frac{a-2}{a+2} &= \frac{a^2-20}{(a-2)(a+2)} - \frac{a-2}{a+2} = \frac{a^2-20-(a-2)^2}{(a-2)(a+2)} = \frac{a^2-20-(a^2-4a+4)}{(a-2)(a+2)} \\ &= \frac{a^2-20-a^2+4a-4}{(a-2)(a+2)} = \frac{4a-24}{(a-2)(a+2)} \end{aligned}$$

در مثال ۱۷ قسمت ج مخرج مشترک این سوال را به دست آورده ایم. حال ببینیم صورت کسرها چگونه به دست آمده اند:

جواب به دست آمده را در صورت کسر اول ضرب میکنیم

$$\frac{\text{مخرج مشترک}}{\text{مخرج کسر اول}} = \frac{(a-2)(a+2)}{(a-2)(a+2)} = 1 \quad \longrightarrow \quad 1(a^2-20) = a^2-20$$

جواب به دست آمده را در صورت کسر دوم ضرب میکنیم

$$\frac{\text{مخرج مشترک}}{\text{مخرج کسر دوم}} = \frac{(a-2)(a+2)}{(a+2)} = (a-2) \quad \longrightarrow \quad -(a-2)(a-2) = -(a-2)^2$$

مثال ۲۱ حاصل عبارت های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an+bm}{mn}$

ب) $\frac{ma}{xy} + \frac{yb}{mz} = \frac{m^2az + xy^2b}{xymz}$

ج)
$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{5x-3} - \frac{4x-5}{3x+4} &= \frac{(2x+1)(3x+4) - (4x-5)(5x-3)}{(5x-3)(3x+4)} \\ &= \frac{6x^2+11x+4 - (20x^2-37x+15)}{(5x-3)(3x+4)} = \frac{6x^2+11x+4-20x^2+37x-15}{(5x-3)(3x+4)} \\ &= \frac{-14x^2+48x-11}{(5x-3)(3x+4)} \end{aligned}$$

مثال ۲۲ حاصل جمع و تفریق های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} \quad \frac{3x+2}{\Delta+x} + \frac{2x-4}{x+\Delta} = \frac{3x+2+2x-4}{x+\Delta} = \frac{5x-2}{x+\Delta}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{\Delta a-2}{a-2} - \frac{2a+1}{2a-4} = \frac{\Delta a-2}{a-2} - \frac{2a+1}{2(a-2)} = \frac{2(\Delta a-2)-(2a+1)}{2(a-2)} = \frac{1\cdot a-4-2a-1}{2(a-2)} = \frac{7a-5}{2a-4}$$

$$\begin{aligned} \text{پ)} \quad \frac{x^2-10}{x^2-9} - \frac{\Delta x-10}{x+3} &= \frac{x^2-10}{(x-3)(x+3)} - \frac{\Delta x-10}{x+3} = \frac{x^2-10-(\Delta x-10)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2-10-(\Delta x^2-1\Delta x-10x+30)}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{x^2-10-\Delta x^2+1\Delta x+10x-30}{(x-3)(x+3)} = \frac{-\Delta x^2+1\Delta x+10x-40}{x^2-9} \end{aligned}$$

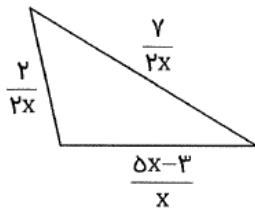
$$\begin{aligned} \text{ت)} \quad \frac{4}{x^2+\Delta x+6} + \frac{\Delta x}{x^2+6x+8} &= \frac{4}{(x+2)(x+3)} + \frac{\Delta x}{(x+2)(x+4)} = \frac{4(x+4)+\Delta x(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{4x+16+\Delta x^2+1\Delta x}{(x+2)(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{\Delta x^2+1\Delta x+16}{x^2+9x^2+26x+24} \end{aligned}$$

$$\text{ث)} \quad \frac{6x+1}{x+4} - \frac{x}{x-2} = \frac{(6x+1)(x-2)-x(x+4)}{(x+4)(x-2)} = \frac{6x^2+x-12x-2-x^2-4x}{(x+4)(x-2)} = \frac{5x^2-21x-2}{x^2+x-12}$$

$$\text{ج)} \quad \frac{1}{x^2-x} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1-2x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1-x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x(x+1)}$$

$$\text{چ)} \quad \frac{2x+8}{x^2-4x+4} - \frac{7}{x-2} = \frac{2(x+4)}{(x-2)^2} - \frac{7}{x-2} = \frac{2(x+4)-7(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{-5x+22}{(x-2)^2}$$

مثال ۲۳ محیط مثلث مقابل را به دست آورید، و آن را ساده کنید. ($x > 0$)



حاصل جمع هر سه ضلع = محیط مثلث

$$\frac{2}{2x} + \frac{7}{2x} + \frac{5x-3}{x} = \frac{2+7+2(5x-3)}{2x} = \frac{9+10x-6}{2x} = \frac{10x+3}{2x}$$

مثال ۲۴ دو عبارت گویا بنویسید که حاصل جمع آن ها $\frac{a-3}{a+5}$ باشد.

دو عبارت باید بنویسیم که **جمع** آن ها $\frac{a-3}{a+5}$ شود. برای این کار لازم است دو عبارت را به شکل

بنویسیم. در جاهای خالی دو چند جمله ای را طوری می نویسیم که حاصل جمع آن ها $a-3$ شود. پس جواب های مختلفی می توان برای آن نوشت. چند جواب متفاوت را در زیر می بینید.

$$\frac{\boxed{a}}{a+5} + \frac{\boxed{-3}}{a+5} = \frac{a-3}{a+5} \quad \frac{\boxed{a-1}}{a+5} + \frac{\boxed{-2}}{a+5} = \frac{a-3}{a+5} \quad , \quad \frac{\boxed{2a-5}}{a+5} + \frac{\boxed{-a+2}}{a+5} = \frac{a-3}{a+5}$$

ساده کردن عبارت های مرکب

کسری که صورت و مخرج آن عبارت گویا باشد را کسر گویای مرکب می نامیم. به دو روش می توان جواب یک عبارت مرکب را به دست آورد:

۱- صورت و مخرج عبارت مرکب را جداگانه حساب می کنیم سپس آن ها را برهم تقسیم می کنیم.

۲- از همان ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی مناسب و غیر صفر ضرب می کنیم، و سپس حاصل را ساده کنیم.

مثال ۲۵ عبارت گویای مرکب زیر را به ساده ترین حالت ممکن بنویسید.

$$\frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}$$

پاسخ: این سوال را به هردو روش حل می کنیم:

روش اول: صورت و مخرج را جداگانه به دست می آوریم.

$$\text{صورت: } 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{1 \times x^2 - 3 \times x + 2}{x^2} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$$

$$\text{مخرج: } 1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} = \frac{1 \times x^2 + 1 \times x - 6}{x^2} = \frac{x^2 + x - 6}{x^2} = \frac{(x+3)(x-2)}{x^2}$$

حال جواب عبارت صورت را بر جواب عبارت مخرج تقسیم می کنیم.

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x^2} \div \frac{(x+3)(x-2)}{x^2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2} \times \frac{x^2}{(x+3)(x-2)} = \frac{x-1}{x+3}$$

روش دوم: صورت و مخرج را در عبارت مخالف صفر x^2 ضرب می کنیم.

$$\frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} \right)} = \frac{x^2 \times 1 - \cancel{x^2} \times \frac{3}{\cancel{x}} + \cancel{x^2} \times \frac{2}{\cancel{x^2}}}{x^2 \times 1 + \cancel{x^2} \times \frac{1}{\cancel{x}} - \cancel{x^2} \times \frac{6}{\cancel{x^2}}} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x-1}{x+3}$$

مثال ۲۶ حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید. (مخرج مخالف صفر فرض شده است.)

$$\frac{\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}}$$

روش اول صورت

$$\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y} = \frac{y(x-y) - x(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{\cancel{xy} - y^2 - x^2 - \cancel{xy}}{(x+y)(x-y)} = \frac{-y^2 - x^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{-(y^2 + x^2)}{(x+y)(x-y)}$$

مخرج

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} = \frac{x(x-y) + y(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 - xy + yx + y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 + y^2}{(x+y)(x-y)}$$

حال جواب عبارت صورت را بر جواب عبارت مخرج تقسیم می کنیم.

$$\frac{-(y^2+x^2)}{(x+y)(x-y)} \div \frac{x^2+y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{-(y^2+x^2)}{(x+y)(x-y)} \times \frac{(x+y)(x-y)}{x^2+y^2} = -1$$

روش دوم

توجه کنید زمانی می توانیم از روش دوم استفاده کنیم که حتما مخرج مشترک عبارت گویای صورت و مخرج مشترک عبارت گویای مخرج باهم برابر باشند.

در اینجا مخرج مشترک هر دو عبارت گویای صورت و مخرج برابر $(x+y)(x-y)$ می باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}} &= \frac{(x+y)(x-y)\left(\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}\right)}{(x+y)(x-y)\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}\right)} = \frac{(x+y)(x-y) \times \frac{y}{x+y} - (x+y)(x-y) \times \frac{x}{x-y}}{(x+y)(x-y) \times \frac{x}{x+y} + (x+y)(x-y) \times \frac{y}{x-y}} \\ &= \frac{y(x-y) - x(x+y)}{x(x-y) + y(x+y)} = \frac{xy - y^2 - x^2 - xy}{x^2 - xy + yx + y^2} = \frac{-y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \frac{-(y^2 + x^2)}{x^2 + y^2} = -1 \end{aligned}$$

مثال ۲۷ عبارت های گویای مرکب زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\text{الف) } \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{x^2-1}{x} \div \frac{x^2+1}{x} = \frac{x^2-1}{x} \times \frac{x}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \frac{n - \frac{n^2}{n-m}}{1 + \frac{n^2-m^2}{n^2-m^2}} &= \frac{\frac{n^2-mn-n^2}{n-m}}{\frac{n^2-m^2+m^2}{n^2-m^2}} = \frac{\frac{-mn}{n-m}}{\frac{n^2-m^2}{n^2-m^2}} = \frac{-mn}{n-m} \div \frac{n^2-m^2}{n^2-m^2} \\ &= \frac{-mn}{n-m} \times \frac{n^2-m^2}{n^2} = \frac{-mn}{n-m} \times \frac{(n-m)(n+m)}{n^2} = \frac{-m(n+m)}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } \frac{\frac{b}{a+b} - \frac{a}{a-b}}{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}} &= \frac{\frac{b(a-b) - a(a+b)}{(a^2-b^2)}}{\frac{a(a+b) - b(a-b)}{(a^2-b^2)}} = \frac{\frac{ab - b^2 - a^2 - ab}{a^2-b^2}}{\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-b^2}} \\ &= \frac{\frac{-b^2-a^2}{a^2-b^2}}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}} = \frac{-(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \div \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{-(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \times \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = -1 \end{aligned}$$

سوالات امتحانی درس دوم

۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) قوانین ضرب و تقسیم عبارتهای گویا مشابه با قوانین ضرب و تقسیم اعداد گویا است.

ب) صورت و مخرج هر عبارت گویا را می توان در هر عددی ضرب نمود.

ج) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ معکوس $x + y$ است.

د) عبارت گویای $\frac{1}{x-y}$ برابر با عبارت گویای $\frac{-1}{x+y}$ است.

۲- جاهای خالی را با اعداد و یا کلمات مناسب پر کنید.

الف) حاصل $\frac{1}{x} \div \frac{1}{y}$ برابر با عبارت ... است.

ب) اگر صورت یک عبارت گویا صفر باشد، حاصل آن ... خواهد بود.

ج) کوچک ترین مخرج مشترک بین عبارتهای $(x^2 - 4)$ و $(x^2 + 5x + 6)$ برابر با عبارت ... است.

د) کسر $\frac{5x^2 - 3}{2x + 7}$ به ازای عدد ... به جای x تعریف نشده است.

۳- ضرب و تقسیم های زیر را انجام دهید. (مخرج همه کسرها مخالف صفر فرض شده اند.)

الف) $\frac{a}{6b} \times \frac{3b}{4} \times \frac{2b}{5} =$

ب) $\frac{4x^2 - 6xy}{5x} \times \frac{10x}{6x - 9y} =$

ج) $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} \times \frac{3x^2 - 6x}{2x + 6} =$

د) $\frac{1+x}{(m+n)} \times \frac{x^2 - y^2}{12} \times \frac{(m+n)^2}{m-n} \times \frac{6(m^2 - n^2)}{x+y} =$

ه) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - x} \times \frac{4x^2}{x+1} =$

و) $\frac{a^2 - b^2}{a} \div \frac{a+b}{a-b} =$

ز) $\frac{a^2}{a^2 - 1} \div \frac{a+2}{a-1} =$

ح) $\frac{4x^2 - 9a^2}{ab - a^2} \div \frac{2x - 3a^2}{a^2b - a^4} =$

ط) $\frac{20x - 25}{3b - 4} \div \frac{4a^2x - 5a^2}{9b^2 - 16} =$

$$۱) \frac{x(x^2 - y^2)}{(x - y)^2} \div \frac{x^2 + xy}{x - y} =$$

$$۲) \frac{4x^2 - 25y^2}{2x^2y + 5xy^2} \div \frac{6x^2 - 15xy}{9x^2y^2} =$$

$$۳) \frac{x^2 - 2x - 15}{5x^2 + 15x} \div \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - x} =$$

۴- جمع و تفریق عبارت‌های گویای زیر را انجام داده و حاصل را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (مخرج همی کسرها مخالف صفر است.)

$$الف) \frac{a - 2}{b - 1} + \frac{2a + 3}{b - 1} =$$

$$ب) \frac{a + b}{a} - \frac{b - a}{b} =$$

$$ج) \frac{x}{x + 2} + \frac{x}{x - 2} =$$

$$د) \frac{x^2}{x^2 + x - 20} - \frac{2x}{3x + 15} =$$

$$هـ) \frac{a}{a + 2} + \frac{2}{a - 2} - \frac{4a}{a^2 - 4} =$$

$$و) \frac{2}{3x - 3} - \frac{x}{x^2 - 1} + \frac{1}{2x + 2} =$$

$$ز) \frac{3}{x} + \frac{3x}{x + 1} - \frac{3}{x(x + 1)} =$$

$$ح) \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20} - \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 25} =$$

$$ط) \frac{4}{a^2 + 3a - 10} - \frac{6}{a^2 - 25} =$$

$$ی) \frac{1}{(a - b)(a - c)} + \frac{1}{(b - a)(b - c)} + \frac{1}{(c - a)(c - b)} =$$

۵ - حاصل عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

الف)
$$\frac{\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1+x}} =$$

ب)
$$\left(\frac{x^2-9}{x^2-4} \times \frac{x^2+3x+2}{x^2-6x+9} \right) \div \frac{x^2+4x+3}{x^2-x-6} =$$

ج)
$$\left(1 - \frac{a-b}{a+b} \right) \div \left(\frac{a+b}{a-b} - 1 \right) =$$

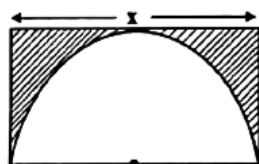
د)
$$\frac{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}{\left(\frac{1+x}{1-x} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{1+x} \right)} =$$

هـ)
$$\frac{\frac{2}{3x-3} - \frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{2x+2}}{\frac{1}{x-1}} =$$

۶ - اگر $\frac{4x^2-36}{x^2-5x+6} \times \frac{2x-4}{ax+24} = 1$ مقدار a را بیابید.

۷ - عبارت گویایی بیابید که اگر در $\frac{4x^2-1}{6+x-x^2}$ ضرب شود، حاصل برابر با $\frac{2x+1}{x+2}$ شود.

۸ - با توجه به شکل زیر:



الف) اگر طول مستطیل x باشد، مساحت قسمت هاشورخورده را بر حسب x به دست آورید.

ب) نسبت مساحت قسمت هاشورخورده به مساحت کل شکل چه قدر است؟

ج) اگر مساحت نیم دایره برابر 50π واحد مربع باشد، مساحت مستطیل را به دست آورید.



۱- الف) درست

ب) نادرست

ج) درست

د) نادرست

۲-

الف) عبارت گویا

ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{2-y}{y-1}$ د) $y-x$

۳- «الف»، «ج»، «و»، «ز»، «ح» و «ک».

۴-

$$x = -2 \Rightarrow \frac{-5}{2}$$

$$x = 3 \Rightarrow \frac{0}{7} = 0$$

$$x = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{-2}{3}$$

۵- خیر، زیرا برای $x = -1$ مخرج عبارت داده شده صفر و حاصل آن تعریف نشده می شود.

۶-

ب) $x = \{-1, 2\}$ الف) $x = 0$ د) به ازای جميع مقادیر x تعریف می شود.ج) $x = \frac{1}{4}$ و) به ازای جميع مقادیر x تعریف می شود.هـ) $x = \{0, 1, -1\}$

۷-

$$\text{الف) } \frac{2(3^2) - (3) - 3}{(3) + 4} = \frac{12}{7}$$

$$\text{ب) } \frac{2(3)(-5) + (-5) + (-5)^2}{2(-5) + 1} = \frac{10}{9}$$

$$\text{ج) } \frac{(1+5)(2 \times 3 + 1)}{2(3^2)(-5)^3} = \frac{42}{-2250} = -\frac{7}{375}$$

۸-

$$\frac{3m-1}{m+2} = \frac{5}{4} \Rightarrow 12m - 4 = 5m + 10 \Rightarrow 7m = 14 \Rightarrow m = 2$$

-۹

الف) $\frac{2a^2}{3x^2}$

ب) $\frac{5x}{x+2}$

ج) $3x-9$

د) $\frac{4a}{9b}$

هـ) $\frac{x+5}{x-2}$

-۱۰

مساحت مستطیل هاشور خورده $= x^2 + 2x$

مساحت کل شکل $= 4x^2 + 10x$

نسبت مورد نظر: $\frac{x^2 + 2x}{4x^2 + 10x}$

پاسخ سوالات درس دوم



۱- الف) درست

ب) نادرست

ج) نادرست

د) نادرست

۲- الف) $\frac{y}{x}$

ب) صفر

ج) $(x-2)(x+2)(x+3)$

د) $\frac{-7}{2}$

-۳

الف) $\frac{ab}{20}$

ب) $\frac{4x}{3}$

ج) $\frac{2x}{2}$

د) $\frac{1+x}{m+n} \times \frac{(x-y)(x+y)}{12} \times \frac{(m+n)^2}{m-n} \times \frac{6(m-n)(m+n)}{x+y} = \frac{(1+x)(x-y)(m+n)^2}{2}$

هـ) $\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} \times \frac{4x^2}{x+1} = 4x$

و) $\frac{(a-b)(a+b)}{a} \times \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{a}$

ز) $\frac{a^2}{(a-1)(a+1)} \times \frac{a-1}{a+2} = \frac{a^2}{a^2+3a+2}$

ح) $\frac{(2x-3a^2)(2x+3a^2)}{a(b-a)} \times \frac{a^2(b-a)}{2x-3a^2} = a^2(2x+3a^2) = 2a^2x + 3a^4$

$$\text{ط) } \frac{\Delta(4x-5)}{3b-4} \times \frac{(3b-4)(3b+4)}{a^2(4x-5)} = \frac{\Delta(3b+4)}{a^2}$$

$$\text{ی) } \frac{x(x-y)(x+y)}{(x-y)^2} \times \frac{x-y}{x(x+y)} = 1$$

$$\text{ک) } \frac{(2x-5y)(2x+5y)}{xy(2x+5y)} \times \frac{9x^2y^2}{3x(2x-5y)} = 3y$$

$$\text{ل) } \frac{(x-5)(x+3)}{5x(x+3)} \times \frac{x(x-1)}{(x-5)(x-1)} = \frac{1}{5}$$

$$\text{الف) } \frac{3a+1}{b-1}$$

$$\text{ب) } \frac{a^2+b^2}{ab}$$

$$\text{ج) } \frac{x^2-2x+x^2+2x}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x^2}{x^2-4}$$

$$\text{د) } \frac{x^2}{(x+5)(x-4)} - \frac{2x}{3(x+5)} = \frac{3x^2-2x(x-4)}{3(x+5)(x-4)} = \frac{x^2+8x}{3(x+5)(x-4)}$$

$$\text{هـ) } \frac{a(a-2)+2(a+2)-4a}{(a-2)(a+2)} = \frac{a^2-4a+4}{(a-2)(a+2)} = \frac{(a-2)^2}{(a-2)(a+2)} = \frac{(a-2)}{(a+2)}$$

$$\text{و) } \frac{(4x+4)-6x+(3x-3)}{6(x^2-1)} = \frac{x+1}{6(x+1)(x-1)} = \frac{1}{6(x-1)}$$

$$\text{ز) } \frac{3x+3+3x^2-3}{x(x+1)} = \frac{3x^2+3x}{x(x+1)} = \frac{3x(x+1)}{x(x+1)} = 3$$

$$\text{ح) } \frac{(x+4)(\cancel{x-4})}{(x+5)(\cancel{x-4})} - \frac{(\cancel{x-5})(x-2)}{(x+5)(\cancel{x-5})} = \frac{x+4}{x+5} - \frac{x-2}{x+5} = \frac{6}{x+5}$$

$$\text{ط) } \frac{4}{(a+5)(a-2)} - \frac{6}{(a+5)(a-5)} = \frac{4(a-5)-6(a-2)}{(a+5)(a-2)(a-5)} = \frac{4a-20-6a+12}{(a+5)(a-2)(a-5)} = \frac{-2a-8}{(a+5)(a-2)(a-5)}$$

$$\text{ی) } \frac{1(b-c)-1(a-c)+1(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 0$$

-۴

-۵

$$\text{الف)} \left[\frac{1-x+x+x^2}{(1+x)(1-x)} \right] \div \left[\frac{1+x-x+x^2}{(1-x)(1+x)} \right] = \frac{x^2+1}{(1-x^2)} \div \frac{x^2+1}{(1-x^2)} = 1$$

$$\text{ب)} \left[\frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+2)} \times \frac{(x+2)(x+1)}{(x-3)^2} \right] \div \frac{(x+3)(x+1)}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x+3)(x+1)}{(x-2)(x-3)} \times \frac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x+1)} = \frac{x+2}{x-2}$$

$$\text{ج)} \left(\frac{a+b-a+b}{a+b} \right) \div \left(\frac{a+b-a+b}{a-b} \right) = \frac{2b}{a+b} \times \frac{a-b}{2b} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\text{د)} \left[\frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{1-x^2} \right] \div \left[\left(\frac{1+x-1+x}{1-x} \right) \left(\frac{1+x-1}{1+x} \right) \right] = \frac{4x}{1-x^2} \div \left[\frac{2x}{1-x} \times \frac{x}{1+x} \right] = \frac{4x}{1-x^2} \times \frac{1-x^2}{2x^2} = \frac{4x}{2x^2} = \frac{2}{x}$$

$$\text{ه)} \frac{4x+4-6x+3x-3}{6(x-1)(x+1)} \div \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{6(x-1)(x+1)} \times (x-1) = \frac{1}{6}$$

-۶

$$\frac{4(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} \times \frac{2(x-2)}{ax+24} = 1 \Rightarrow \frac{8x+24}{ax+24} = 1 \Rightarrow a = 8$$

-۷

$$\frac{a}{b} \times \frac{(2x-1)(2x+1)}{-(x-3)(x+2)} = \frac{2x+1}{x+2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{-(x-3)}{(2x-1)}$$

-۸

$$\text{مستطیل } S = x \times \frac{1}{2}x = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{نیم دایره } S = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \times \pi}{2} = \frac{x^2}{8}\pi$$

$$\text{قسمت هاشور خورده } S = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2\pi}{8} = \frac{4x^2 - x^2\pi}{8} = \frac{x^2(4-\pi)}{8}$$

$$\text{ب)} \frac{\text{قسمت هاشور خورده}}{\text{کل شکل}} S = \frac{\frac{x^2(4-\pi)}{8}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{4-\pi}{4}$$

$$\text{ج)} \text{نیم دایره } S = \frac{x^2}{8}\pi = 50\pi \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = \sqrt{400} = 20$$

$$\text{مستطیل } S = \frac{x^2}{2} = \frac{20^2}{2} = 200$$

علی مصطفی کارشناس ارشد ریاضی

دبیر ریاضی مقاطع متوسطه اول و دوم

کانال ریاضی متوسطه اول

@riazisaeedamini