

فصل سوم تابع

۱- آشنایی بیشتر با تابع ۲- انواع تابع

۳- وارون تابع ۴- اعمال روی تابع

۱–آشنایی بیشتر با تابع:

در سال دهم با مفهوم تابع آشنا شدید. در این فصل ضمن یادآوری تابع و بررسی اجزای آن، چند نوع دیگر تابع و ویژگی‌های آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس ویژگی یک به یک بودن و وارون تابع و اعمال جبری را روی توابع یاد می‌گیرید.

تعریف تابع :

یک تابع از مجموع A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A، دقیقا یک عضو از مجموعه B نسبت داده می‌شود. به مجموعه A ; دامنه تابع و به مجموعه B ; هم‌دامنه تابع می‌گویند. برد تابع زیر مجموعه‌ای از هم‌دامنه است.

$$f \begin{cases} A \longrightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$$

به زبان ساده‌تر : تابع

الف) از روی زوج مرتب : مجموعه زوج های مرتب که دارای مولفه اول یعنی (x) برابر نباشد.

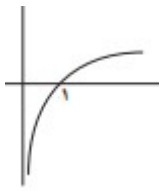
ب) از روی نمودار : هر خط موازی محور yها رسم کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

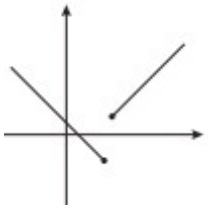
ج) از روی ضابطه : معمولا y نباید داخل قدر مطلق باشد یا توان زوج داشته باشد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۱. کدام یک تابع است ؟

الف) 

ب) 

ج) 

د) $|y| = |x|$

ه) $y = \frac{2}{x}$

ز) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$

ح) $f = \left\{ \left(\sqrt{a}, 2\right) , \ (a , -1) , \ \left(\frac{a}{\sqrt{a}} , +2\right) \right\}$

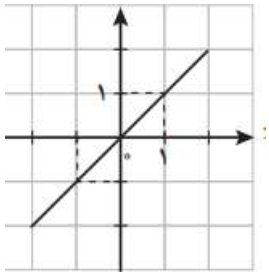
ط) $g = \{(0 , 1) , (1 , 2) , (2 , 4) , (3 , 8) , \dots\}$

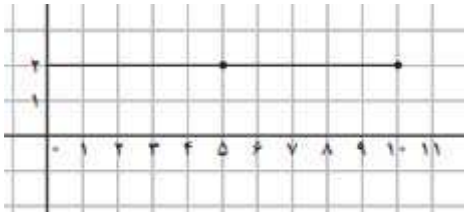
کار در کلاس

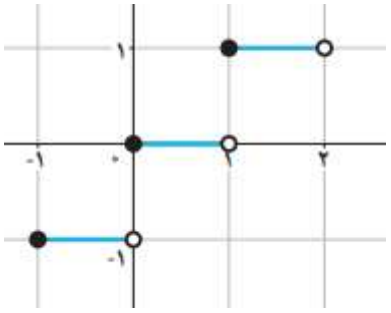
۱. در هر قسمت نمودار تابع را رسم کنید :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases} \qquad y: \begin{cases} [-2 , 1) \longrightarrow [4 , 1) \\ f(x) = x^2 \end{cases} \qquad h(x): \begin{cases} \{-2 , 0 , 1\} \longrightarrow N \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

۲. نمایش جبری توابع زیر را بنویسید.







۳. تفاوت هم‌دامنه و برد را با ذکر یک مثال نشان دهید .

۴. برای مشخص کردن یک تابع باید چه چیزهایی کاملا مشخص باشند. مثال بزنید.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۵. هر تابع را از سه دیدگاه می‌توان بررسی کرد:

۱. به عنوان یک ماشین که ورودی می گیرد و خروجی تحویل می‌دهد.

۲.به عنوان دستور یا قاعده ای (ضابطه ای) که با ورودی های مشخص خروجی می‌دهد.

۳. به عنوان نموداری از صفحه xy که شامل تمام زوج مرتب‌هایی به صورت $\big(x\,,f(x)\big)$ است.

با یک مثال هر سه مورد را نشان دهید .

مثال 6. نمودار تابع $f:\begin{cases}[-1\,,2]\longrightarrow[0\,,+\infty)\\ f(x)=|x|\end{cases}$ را رسم کنید. با کدام یک از توابع زیر برابر است؟

$f:\begin{cases}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ f(x)=|x|\end{cases}$ $\quad f:\begin{cases}[-1\,,2]\longrightarrow[0\,,2]\\ f(x)=|x|\end{cases}$ $\quad \begin{cases}f:[-1\,,2]\longrightarrow\mathbb{R}\\ f(x)=\sqrt{x^2}\end{cases}$ $\quad \begin{cases}f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{\geq 0}\\ f(x)=|x|\end{cases}$

۷. در هر قسمت دامنه و برد تابع را تعیین کنید.

الف) $f(x)=-\frac{1}{2}$ ب) $V(x)=20-2t$ تابع خالی شدن آب یک منبع

ج) تابع ارتفاع سیبی که از زیر زمین به هوا پرتاب شده است: $h(t)=-t^2+5t-4$

د) تابع هزینه پاک سازی شهری و صنعتی از یک رودخانه(xدرصد از آلودگی‌های): $f(x)=\frac{255x}{100-x}$

ه) تابع برچیده شدن رطوبت از بتنی که تازه ریخته شده برحسب زمان: $g(x)=\sqrt{2t+3}$

و) تابع رشد یک نوع سلول سرطانی برحسب زمان $k(t)=3^t$

ز) تابع رشد قد یک کودک برحسب ماه $g(x)=7\sqrt{x}+50$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تابع به عنوان ماشین

x متغییر مستقل و y متغییر وابسته می‌شود. در این صورت y از روی عملی که روی x انجام می‌دهد به دست می‌آید. به عبارت دیگر

به عنوان مثال در تابع f با ضابطه $f(x) = |x|$

ماشین تابع : $f(x) = |\ \ |$ است که برای هر ورودی x فاصله آن را از مبدا مختصات $f(x)$ یا y نتیجه می‌دهد. مثلا برای ورودی ۳-، $f(x) = |-۳|$ خواهد بود.

یا مثال دیگر در تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ماشین تابع $f(x) = \sqrt{\ }$ است که برای هر ورودی x جذر آن برای خروجی (y) نتیجه می‌دهد. مثلا برای ورودی ۳۶ خروجی۶ خواهد بود.

اما تابع $f(x) = |x|$ از منظر تعریف به صورت $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ معرفی می‌شود.

و از منظر نمودار، تمام زوج مرتب‌هایی به شکل $(x, |x|)$ در صفحه مختصات است. یعنی:

تساوی دو تابع

دو تابع g و f را برابر می‌گوییم هرگاه :

الف) $D_f = D_g$ و ب) برا ی هر x از دامنه آنها : $f(x) = g(x)$

از منظر نمودار: هنگامی دو تابع برابرند که نمودارهای آنها کاملا بر هم منطبق باشند.

از منظر زوج مرتب: اگر دو تابع با زوج مرتب داده شده باشند، هنگامی با هم برابرند که به عنوان دو مجموعه با هم برابر باشند.

مثال: کدام جفت توابع زیر با هم مساوی‌اند؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

الف) $\begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} \\ g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}^2 \\ g(x) = \sqrt{x^2} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} f = \{(۱،۲), (-۱،۱۲), (-۲،۳)\} \\ g = \{(۱،۱۲), (-۱،۳), (-۲،۲)\} \end{cases}$

د) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} \\ g(x) = \frac{2x-4}{2} \end{cases}$

مثال ۲. تابعی بنویسید که مساحت یک مربع را برحسب طول ضلع آن بیان می‌کند و نمودار آن را رسم کنید

تابع $y = x^2$ را رسم کنید و آن را با تابع مساحت برحسب طول ضلع مقایسه کنید. شباهت‌ها و تفاوت‌ها را بنویسید.

کار در کلاس

۱. درست و نادرست را با ذکر دلیل بیان کنید.

الف) اگر دامنه دو تابع برابر و برد آنها نیز باهم برابر باشند آنگاه دو تابع برابرند.

ب) برد تابع همان هم‌دامنه تابع است.

ج) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه آن بازه $[0\ ,\ 2]$ است.

د) تعداد توابع $A = \{a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_m\}$ به $B = \{b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3\ ,\ \dots\ ,\ b_n\}$ برابر m^n است.

۲. تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموع اعداد حقیقی منفی باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارند.

۳. کدام جفت توابع زیر مساوی‌اند؟ چرا؟

الف) $\begin{cases} f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = |x| \end{cases}$

د) $\begin{cases} t: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ t(x) = \sqrt{x} \end{cases}$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

ب) $\begin{cases} g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ g(x) = x \end{cases}$

ه) $\begin{cases} m: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ m(x) = 2 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} h: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} \end{cases}$

و) $\begin{cases} n: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\} \\ n(x) = \frac{2x-2}{x-1} \end{cases}$

۴. تابع $f(x) = x + 3$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ k^2 - 9 & x = 3 \end{cases}$ با یکدیگر برابرند. مقدار k را به دست آورید.

۵. کدام جفت توابع زیر مساوی‌اند؟ چرا؟

الف) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} \times \sqrt{x-1} \\ g(x) = \sqrt{x^2-1} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x^2} + x \\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} f(x) = x \times sgn(x) \\ g(x) = |x| \end{cases}$

د) $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \div \frac{x+1}{x+2} \\ g(x) = \frac{x^2+2x}{x+1} \end{cases}$

۷. تابع g در شرایط زیر صدوق می‌کند. g را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه آن اعداد حقیقی نامثبت باشد. ب) تابع g به هر عدد بزرگتر از (-2) قرنیه مربع آن را نسبت می‌دهد.

ج) تابع g به هر عدد کوچکتر از یا مساوی (-2) قدر مطلق آن را نسبت می‌دهد.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۸. دامنه توابع زیر را به دست آورید

الف) $f(x)=-\frac{5}{3}$ ب) $f(x)=\frac{x+2}{5}$ ج) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2}$

د) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-2x}$ ه) $f(x)=\frac{x-2}{x^2+4}$ و) $f(x)=\frac{x+1}{|2x-1|-3}$

ز) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ ح) $f(x)=\sqrt{10-x^2}$ ط) $f(x)=\sqrt{x^2-2x-2}$

ی) $f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$ ک) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+2}{3-x}}$ ل) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{|x|-2}}$

م) $f(x)=\sqrt{2x+1}+\sqrt{2-x}$ ن) $f(x)=\frac{1+\frac{x+1}{x}}{2-\frac{x+1}{x-1}}$

انواع تابع

۱- تابع ثابت : تابعی که دارای مولفه دوم مشخص و ثابتی باشد. مانند:

$$g:\begin{cases}[1,3]\to N\\ g(x)=5\end{cases} \qquad h(x)=5f=\{(1,4),(2,4),(3,4)\}$$

۲- تابع همانی : تابعی که مولفه اول و دوم آنها در هر زوج مرتب، برابرند. مانند:

$$g:\begin{cases}[1,3]\to \mathbb{R}\\ g(x)=x\end{cases} \qquad h(x)=xf=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳- **تابع خطی** : هر تابع به صورت $f(x)=ax+b$ را تابع خطی گویند. (توابع ثابت و همانی نوع خاصی از توابع خطی‌اند). مانند:

$$p(x)=2x-1 \qquad g(x)=\frac{x}{2}+1 \qquad h(x)=\frac{x}{2}+1 f(x)=-x+3$$

$$D=[0,2] \qquad\qquad D=\{-1,0,1,2\}$$

۴- **تابع سهمی**: هر تابع به فرم $a\neq 0$: $f(x)=ax^2+bx+c$ را تابع درجه دو یا سهمی می‌گویند.

ویژگی‌های تابع سهمی:

الف) دامنه آن $\mathbb{R}$ است مگراینکه صورت سوال دامنه مشخص را مدنظر داشته باشد.

ب) برد این تابع از محاسبه $\frac{-\Delta}{4a}$ و با توجه به علامت a تعیین می‌شود.

$$a>0 \Longrightarrow \qquad \Longrightarrow \text{برد} = R=\left[-\frac{\Delta}{4a},+\infty\right)$$

$$a<0 \Longrightarrow \qquad \Longrightarrow \text{برد} = R=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}\right]$$

ج) **یادآوری برای تعیین علامت عبارت** $f(x)=ax^2+bx+c$ **مطابق زیر:**

$$\Delta>0 \Longrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{دو ریشه حقیقی} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Delta=0 \Longrightarrow x_1=x_2=-\frac{b}{2a} \qquad \text{یک جواب مضاعف} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Delta<0 \Longrightarrow \text{معادله جواب ندارد} \qquad \Longrightarrow$$

۵- **تابع گویا** : به زبان ساده تابع به فرم کسری که متغییر در مخرج باشد. مانند $y=\frac{x+3}{5x}$ یا

هر تابع به صورت $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامند، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای‌اند و $Q(x)\neq 0$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: کدام یک تابع گویا است؟ چرا؟

الف) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x)=\frac{x+3}{\sqrt{2}x-2}$ ج) $h(x)=\frac{x+2}{5}$ د) $p(x)=\frac{5}{x+2}$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $\begin{cases} g:\{-3,-2,-1,1,2,3\} \\ g(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$ ج) $\begin{cases} h:(-\infty,0)\to(-\infty,0) \\ h(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{0\} \\ f(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$

۶- **تابع رادیکالی** : به زبان ساده تابعی که متغییر زیر رادیکال باشد. مانند $y=\sqrt{3x^2+6}$ یا

تابعی که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد، تابع رادیکالی(ریشه دوم) می‌نامند و به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ نمایش می‌دهند.

مثال1-

$f(x)=\sqrt{x}$ $D=[0,+\infty)$:دامنه $R=[0,+\infty)$: برد

۲. تابع ریشه‌سوم را به صورت $y=\sqrt[3]{x}$ داریم. دامنه و برد این تابع را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

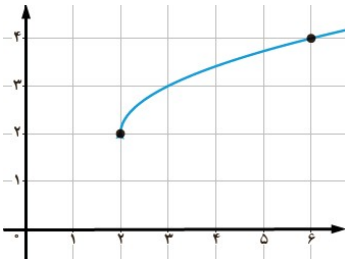
۳. رسم کنید:

الف) $y=\sqrt{x+2}$ ب) $y=\sqrt{x}+3$ ج) $y=-\sqrt{-x}+1$

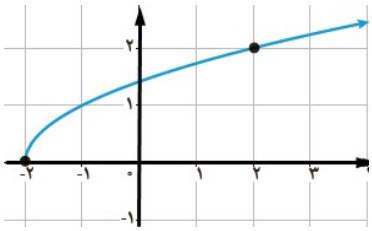
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

د) $y = \sqrt{2x - 3}$ چ) $y = 2 - \sqrt{x}$ ه) $y = \sqrt{2 - x}$

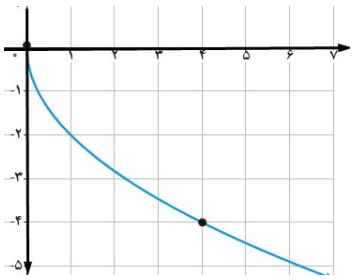
۴. نمایش جبری توابع زیر را بر اساس $y = \sqrt{x}$ بنویسید.



الف)



ب)



ج)

۵. تابع $y = \sqrt{x}$ را ابتدا نسبت به محور xها قرینه می‌دهیم (قرینه استخری) سپس یک واحد به سمت راست منتقل کرده و ۲ واحد بالا می‌آوریم. نمایش جبری این تابع را بنویسید و دامنه و برد آن را مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید.

۶. شکل روبرو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ را بیابید. (ریاضی ۹۲)

۷. اگر عبارت $\left(\sqrt[2]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}\right)$ عدد حقیقی باشد. مجموعه مقادیر x را تعیین کنید.(تجربی ۹۶)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

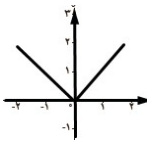
۸. دامنه تابع $y = \frac{1}{\sqrt{mx^2 - mk + 2}}$ برابر تمام اعداد حقیقی است. حدود m را بیابید.

۹. به کمک توصیف فارسی توضیح دهید نمودار $y = 3\sqrt{6x + 1}$ چگونه از روی نمودار $y = \sqrt{x}$ به دست آورید.

۱۰. نمودار تابع $y = \sqrt{|x|}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بنویسید.

۱۱. تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را به تقریب برحسب (cm) تا حدود ۶۰ سالگی نشان می‌دهد. x نشان دهند ماه‌های پس از تولد است. دامنه و برد این تابع را مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید. قد یک کودک شش ساله تقریبا چقدر است؟ کودکی با قد (cm) ۸۵ حدودا چند ماهه است؟

۷- قدر مطلق:

تابع $y = |f(x)|$ که $f(x)$ عبارت جبری است را تابع شامل قدر مطلق می‌گوییم. ساده‌ترین نوع تابع قدر مطلق $y = |x|$ است که نمودار آن  است و $D = \mathbb{R}$ و $R = [0, +\infty)$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸- تابع چند جمله‌ای:

هر تابع به شکل $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ که $a_n\neq 0$ را یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌گوییم. $(n\in W)$ مانند :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^{10}+\sqrt{2}x^8-3x^5+2$$

۹- **تابع نمایی، لگاریتمی** : مانند

$$y=\log(x+1)-2 \qquad \text{or} \qquad y=2^{x-1}$$

در فصل‌های بعدی بررسی می‌گردد.

۱۰- **تابع چندضابطه‌ای:** اگر دامنه تابع به چند بخش تقسیم شود و برای هر بخش ضابطه‌ای جداگانه تعریف شود **تابع را چند ضابطه‌ای** گوییم. توابع چند ضابطه‌ای به فرم زیرند :

$$f(x)=\begin{cases} f_1 & D_1 \\ f_2 & D_2 \\ f_3 & D_3 \end{cases}$$

۱۱- **تابع مثلثاتی** : تابعی که متغییر، کمان مثلثاتی باشد. مانند $y=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ یا

تابعی که متغییر جلوی نسبت مثلثاتی باشد را تابع مثلثاتی می‌گوییم مانند $f(x)=sinx$. نمودار و ویژگی‌های این نوع توابع در فصل‌های بعدی و سال‌های بعد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مثال : اگر تابع f به صورت زیر باشد حاصل $f(f(5))-f(f(1))$

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3, & x>3 \\ x-\sqrt{x+4}, & x\leq 3 \end{cases}$$

۱۲- تابع علامت:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تابع به فرم $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ یا $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ را تابع علامت می‌گوییم. این تابع را به صورت $f(x)=sgn(x)$ نیز معرفی می‌کنند. نمودار آن را رسم کنید.

۱۳- تابع پله‌ای:

تابعی که دامنه آن به چند قسمت تقسیم شود و برای هر قسمت دامنه آن تابع ثابت تعریف کنیم، تابع پله‌ای می‌نامند.

مثال: در یک پارکینگ هزینه پارک خودرو مطابق جدول روبروست. ضابطه تابع را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}2 & 0<x<2\\ 3 & 2\leq x<2/5\\ 4 & 2/5\leq x<3\\ 5 & 3\leq x\leq 5\end{cases}$$

مثال2- برای تابع پله‌ای روبرو یک مسئله کاربردی بسازید و نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}7 & 0<x\leq 2\\ 11 & 2<x<5\\ 15 & 5\leq x<8\\ 25 & 8\leq x\leq 12\end{cases}$$

۱۵- تابع جزء صحیح

اگر x عدد حقیقی دلخواهی باشد، جزء صحیح آن بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.

$$\left[-\frac{1}{3}\right]=-2 \quad , \quad \left[\frac{2}{8}\right]=2 \quad , \quad [4]=4 \quad , \quad [-3]=-3$$

مثال 1- حاصل را بنویسید :

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱) $[-\pi]+[\sqrt{2}]-\left[\frac{\pi}{3}\right]=$

۲) $[1+\sqrt{5}]+[1-\sqrt{5}]=$

۳) $[1]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{35}]=$

۴) $\left|\left[-\frac{5}{2}\right]\right|+\left[\left|-\frac{5}{2}\right|\right]=$

تابعی که هر عدد حقیقی x را به جزء صحیح آن نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود.

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to Z\\ f(x)=[x]\end{cases}\qquad D_f=\mathbb{R}\quad \text{و}\quad R=Z$$

مثال2- نمودار تابع $y=[x]$ را رسم کنید.

نکته: برای رسم نمودار $[kx]$ در بازه $[a,b]$ مطابق دستورالعمل زیر می‌رویم:

-1 $\quad [a,b]\Rightarrow a\le x\le b\Rightarrow ka\le kx\le kb$ (بازه را در k ضرب می‌کنیم.)

-2 $\quad ka\le kx<n\quad ,\quad n\le kx<n+1\ ,\dots\quad ,\quad \dots\le kx<kb$

n اولین عدد صحیح بعد از ka است

-3 با توجه به تقسیم‌بندی (۲) مقدار جزء صحیح از نامساوی‌ها می‌یابیم و y را محاسبه می‌کنیم.

-4 تمام موارد قسمت (۲) را بر k تقسیم کرده و با تعیین آن روی محور xها و مقدار y آنها، نمودار را رسم می‌کنیم.

مثال3-نمودار $y=[3x]+1$ را در بازه $[-2,1]$ رسم کنید.

۱) $\left[-\frac{2}{3},1\right]\Rightarrow -\frac{2}{3}\le x\le 1\quad\Rightarrow\quad -2\le 3x\le 3$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

4-نمودار تابع $y = \left[\frac{x}{3}\right]$ را در بازه $[-6, 5]$ رسم کنید.

۱) $[-6, 5] \Longrightarrow -6 \le x \le 5 \implies -2 \le \frac{x}{3} < \frac{5}{3}$

ویژگی‌های جزء صحیح:

1) $[x] = n \quad \Leftrightarrow \quad n \in Z\,,\ n \le x < n+1$

2) با توجه به رسم نمودار محور xها به صورت مایل و حفره‌دار بودن نقاط صحیح و توضیحات سر کلاس که بیانگر تعریف جزء صحیح است این نامساوی واضح است $[x] \le x$

به طور کلی داریم: $x - 1 < [x] \le x \quad : \ x \in \mathbb{R}$

مثال: $\left[\frac{10}{2}\right] \le \frac{10}{2} \qquad [-12] \le -12$

مثال: $[x + (-2)] = [x] - 2$

3) $[x + k] = [x] + k \ \Leftrightarrow k \in Z$

4) $y = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$ دامنه $= D = \mathbb{R}$ ، برد $= R = \{0, -1\}$

5) $y = x - [x] \qquad D = \mathbb{R}$ و $R = [0, 1)$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$y = x - (-1)$ و ... $-1 \leq x < 0$ و $y = x - 0$ $0 \leq x < 1$

کار در کلاس

1- مجموعه جواب معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $[2x - 3] = -8$

ب) $2[x + 1] = 10$

ج) $3[x] = 5$

د) $[x] - 3 > 0$

ه) $[x] - 3 \geq 0$

و) $[x] - 3 < 0$

ز) $[x] - 3 \leq 0$

2- نمودار توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y = \left[\frac{x}{3}\right]$ $[-3, 7]$

ب) $y = \frac{1}{3}[x]$ $[-1, 2]$

ج) $y = [x] - [-x]$

د) $y = x + [x]$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ه) $y = \left[x + \frac{1}{2}\right] \quad [-2, 2]$

3- نمودار توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ \sqrt{x-1} & x \geq 0 \end{cases}$

ب) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1 & x > 0 \\ \sqrt{x-1} & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$

ج) $h(x) = \begin{cases} [x] & 0 < x < 2 \\ \frac{x+1}{x} & -4 < x < 0 \end{cases}$

کار در منزل

1- اگر $[x^2 + x] = -1$ باشد حاصل $[x^{20}]$ کدام است؟ (تجربی۸۸)

2- در تابع $f(x) = x^2 - 2[x]$ مقدار؟ $f\left(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3})\right)$ (تجربی۹۰)

3- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = \frac{1}{[x]}$ ب) $y = x[x]$ ج) $y = \frac{x}{[x]}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

4- دامنه توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=\frac{x}{[x]+[-x]+1}$ ب) $y=\sqrt{[x]+[-x]}$ ج) $y=\frac{x^2+x}{x-[x]}$

5- برای $n>2$ و $n\in N$ حاصل را به‌دست آورید: (تجربی۹۱)

$$\left[\sqrt{4n^2-3n+1}\right]-2\left[\sqrt{n^2-2n}\right]=?$$

6- اگر $f(x)=x-[x]$ برد تابع $g(x)=f(2x-3)-2f(x)$ را بیابید. (ریاضی۹۲)

وارون تابع:

تابع یک به یک: تابعی یک به یک است که مولفه دوم برابر نداشته باشد.

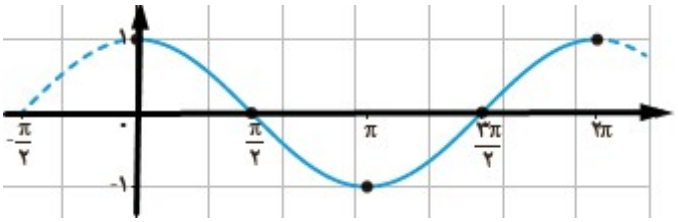
مثال1- تابع f، $(1-1)$ است. اما تابع g یک به یک نیست.

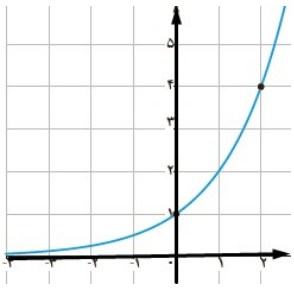
$$f=\{(1,7),(2,9),(3,1)\} \quad , \quad g=\{(1,3),(2,3),(3,5)\}$$

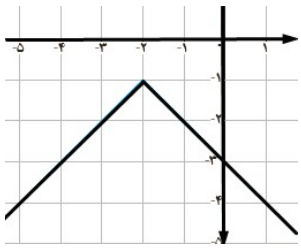
برای تشخیص یک به یک بودن تابع از روی نمودار داده شده: اگر هر خطی موازی محور xها بکشیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال2- کدام تابع یک به یک **است.**







وارون تابع و تابع وارون :

اگر رابطه بین دو مجموعه به‌صورت زوج مرتب داده شده باشد، رابطه که از جابجایی دو مولفه هر زوج مرتب به‌دست می‌آید وارون آن رابطه می‌نامیم. اگر f رابطه باشد، وارون آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

$$f = \{(1,2),(3,5),(3,2)\} \xrightarrow{\text{وارون}} f^{-1} = \{(2,1),(5,3),(2,3)\}$$

در حالت کلی:

$$f^{-1} = \{\,(y,x) \mid (x,y) \in f\,\}$$

(-1) در f^{-1} یک نماد است و معنی توان منفی را نمی‌دهد، یعنی:

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

اگر تابعی یک به یک باشد آن تابع را وارون پذیر می‌گوییم و f^{-1} را تابع وارون f می‌نامند واضح است که وارون تابع و تابع وارون با یکدیگر متفاوت‌اند. در واقع وارون تابع الزاما تابع نیست اما تابع وارون الزاما تابع است.

مثال: وارون توابع زیر را بنویسید. کدام تابع وارون پذیر است؟

$$f = \{(1,2),(3,7),(-1,8)\} \xrightarrow{\text{وارون}} f^{-1} = \{(2,1),(7,3),(8,-1)\}$$

f وارون‌پذیر است. زیرا تابعی یک به یک است. f^{-1} تابع وارون است.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$g=\left\{\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{1}{3}\right),(-1,1),(1,1)\right\}\xrightarrow{\text{وارون تابع}}g^{-1}=\left\{\left(\frac{1}{2},2\right),\left(\frac{1}{3},3\right),(1,-1),(1,1)\right\}$$

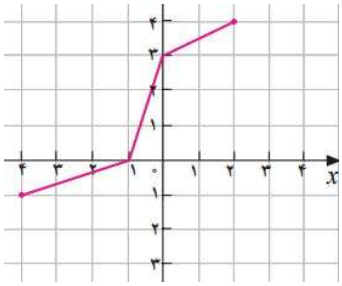
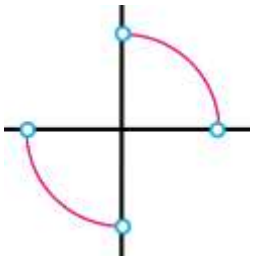
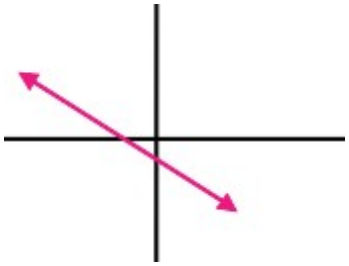
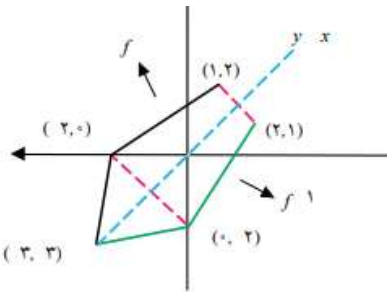
g وارون پذیر نیست. زیرا تابعی یک به یک نیست. g^{-1} تابع وارون نیست و صرفا وارون تابع است.

برای به‌دست آوردن تابع وارونِ یک تابع وارون پذیر :

الف) اگر تابع به صورت زوج مرتب باشد، در هر زوج مرتب جای x,y را عوض می‌کنیم.

الف) $f=\{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)\}\ \longrightarrow\ f^{-1}=\{(1,1),(4,2),(9,3),(16,4)\}$

ب) اگر نمودار تابع باشد، قرینه آن را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) رسم می‌کنیم.

ج) اگر ضابطه تابع $y=f(x)$ داده شده باشد، ابتدا معادله تابع را برحسب x حل می‌کنیم (یعنی x را می‌یابیم) و سپس در مرحله آخر جای x وy را عوض می‌کنیم. آخرین y همان f^{-1} است.

مثال: در هر قست تابع وارون را به‌دست آورید:

الف) $f=\left\{(-1,0),\left(\frac{2}{3},-1\right),(2,2),(10,-6)\right\}\ \longrightarrow\ f^{-1}=$

ب) $f(x)=-2x+1\ \longrightarrow\ f^{-1}=$

ج) $f(x)=\frac{2+5x}{3}$

د) $f(x)=x^2-2x+1\ \ ;\ \ x\le 1$

$$y=(x-1)^2\xrightarrow{\sqrt{\ }}\sqrt{y}=\sqrt{(x-1)^2}\rightarrow\sqrt{y}=|x-1|\xrightarrow{x\le 1}\sqrt{y}=-(x-1)\rightarrow$$

$$\sqrt{y}=-x+1\rightarrow x=1-\sqrt{y}\xrightarrow{\text{جای y,x عوض می‌شود}}y=1-\sqrt{x}\rightarrow f^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

محاسبه وارون تابع به کمک ماشین تابع:

مثال 1- وارون تابع $y = \sqrt{x+1} - 2$ را به کمک ماشین تابع به‌دست آورید.

ماشین تابع f:

مثال2- به روش ماشین تابع، تابع وارون $f(x) = x^2 - 4x + 3$

مثال3- به روش ماشین تابع ، تابع وارون $g(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ را به‌دست آورید.

مثال4- وارون تابع $y = \frac{x+1}{2x-3}$ را بیابید.

ویژگی‌های تابع وارون:

اگر f^{-1} تابع وارون با ضابطه f باشد.

1) $D_f = R_{f^{-1}}$, $R_f = D_{f^{-1}}$

2) توابع f , f^{-1} در صورتی که همدیگر را قطع کنند باشرط صعودی بودن همدیگر را روی خط $y = x$ قطع می‌کنند. از این رو برای یافتن نقطه تقاطع یکی از معادلات $f = f^{-1}$ یا $f = x$ یا $f^{-1} = x$ را حل می‌کنیم. اگر تابع نزولی باشد ممکن است همدیگر را قطع کنند و روی خط $y = x$ نباشد.

3) در تابع خطی $y = ax + b$:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

الف) $a = 1 , b = 0$ ب) اگر $a = -1 , b \in \mathbb{R}$ در این صورت $f = f^{-1}$.

4) در تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$:

اگر $a + d = 0$ یا $a = -b$) باشد در این صورت $f = f^{-1}$.

5) تابع چند ضابطه‌ای در صورتی وارون‌پذیر است که دو شرط زیرا را همزمان داشته باشد :

1- تک‌تک ضابطه‌ها در دامنه خود یک‌به‌یک باشند. 2- اشتراک بردها تهی باشد.

بهتر است به‌روش رسمِ تابع چند ضابطه‌ای از یک به یک بودن کلی تابع مطمئن شویم و برای یافتن f^{-1} در تک تک ضابطه‌ها x را برحسب y می‌یابیم.

6) برای یافتن نمودار f^{-1} از روی نمودار تابع f ، قرینه تابع f را بر اساس خط $y = x$ می‌یابیم.

7) اگر تابعی یک به یک نباشد با محدود کردن دامنه آن (تحدید دامنه) می‌توانیم آن را وارون پذیر کنیم.

کار در منزل :

1- تابعی مثال بزنید که یک به یک (وارون‌پذیر) نباشد. توصیفی – نموداری – ضابطه‌ای – زوج مرتبی.

2- آیا تابع $f(x) = \frac{3}{7}x$ و $g(x) = \frac{7}{3}x$ وارون یکدیگرند؟ دو تابع $f(x) = \frac{3}{7}$ و $g(x) = \frac{7}{3}$ چطور؟ چرا؟

3- به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را به‌دست آورید:

الف) $g = \begin{cases} -x + 2 & x < 1 \\ -1 - x & x > 1 \end{cases}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$f^{-1} = \frac{5}{8}x + 12 \implies f = ?$$

ج) $f(x) = 2 - |x + 1| \quad ; \quad x > 0$

د) $f(x) = x^2 + 10x + 24 \quad ; \quad x > -5$

د) $y = \sqrt{x - 2} - 1$

4- ابتدا نمودار تابع $y = x^2 - 2x + 2$ را رسم کنید و نشان دهید یک به یک نیست. با تحدید دامنه آن را وارون پذیر کنید و ضابطه وارون آن را به‌دست آورید. نمودار f^{-1} را رسم کنید و دامنه و برد آن را بنویسید.

5- مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع‌ها یک به یک باشند.

الف) $y = 88x^2 - 200ax + 75$ ب) $y = \begin{cases} x + 1 & x > 1 \\ ax - 1 & x < 1 \end{cases}$

6- درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) وارون تابع $y = -x + \frac{1}{2}$ با خودش برابر است.

ب) در تابع $y = \frac{x+2}{3x}$، دامنه f^{-1} برابر $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ است.

ج) وارون تابع $y = -2$ همان $y^{-1} = \frac{-1}{2}$ است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

د) اگر f و g دو تابع باشند که وارون یکدیگر باشند آنگاه :

$(fog)(x) = x \;;\; x \in D_g \;\;,\;\; (gof)(x) = x \;\;;\;\; x \in D_f$

ه) وارون تابع $f(x)\begin{cases} x^2 & x > 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ برابر $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ است.

ز) وارون تابع $y = \frac{2x+3}{x-3}$ باخودش برابر است.

ح) وارون تابع $y = \sqrt{x-2}$ برابر $f^{-1}(x) = x^2 + 2$ است.

7- اگر رابطه $f(x) = \{(3,2),(a,5),(3,a^2-a),(b,2),(-1,4)\}$ تابعی $(1-1)$ باشد دوتایی (a,b) را بیابید.

8- در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار f^{-1} را بیابید. (ریاضی۸۸)

9- اگر ضابطه $f(x) = x^2 - x + 1$ باشد ، نمودار f^{-1} الزاما از کدام نقطه می‌گذرد.

1) $(-1,0)$ 2) $(0,-1)$ 3) $(1,0)$ 4) $(0,1)$

10- ضابطه وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ را به‌دست آورید. (تجربی۹۱)

11- ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ را به‌دست آورید. (تجربی۹۲)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

12- تابع با ضابطه $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه‌ای وارون پذیر است. ضابطه f^{-1} در آن بازه را بیابید. (ریاضی۹۲)

13- ضابطه وارون تابع $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ را به‌دست آورید. (تجربی۹۱)

14- ضابطه معکوس تابع $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ به کدام صورت است. (تجربی۹۲)

1) $y = x\sqrt{|x|} \quad x \in \mathbb{R}$

2) $y = x\sqrt{|x|} \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$

3) $y = x|x| \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$

4) $y = x|x| \quad x \in \mathbb{R}$

15- اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(۶) + g(۱۲) = ?$ کدام است؟ (تجربی۹۹)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

16- وارون تابع $f(x) = x^3 - x + 1$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟ (تجربی۱۴۰۱)

۱) $(-1, -2)$ ۲) $(\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$ ۳) $(1, 2)$ ۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{8})$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

17- تابع $x \geq 1$; $f(x) = x^2 - 2x - 3$ مفروض است. نمودارهای دو تابع $g(x) = \frac{x-9}{2}, f^{-1}$ با کدام طول متقاطع‌اند؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

اعمال روی تابع

اگر f, g دو تابع با ضابطه‌های $f(x), g(x)$ باشد، اعمال جبری روی توابع را چنین تعریف می‌کنیم.

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \qquad D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \qquad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \frac{D_f}{g} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

نکته:

$$1) \qquad (f)^2(x) = (f \times f)(x) = f(x) \times f(x)$$

$$2) \qquad (kf)(x) = kf(x)$$

2- به زبان ساده‌تر برای اعمال جبری روی توابع :

روی دامنه مشترکِ توابع داده شده، عمل جبری گفته شده را روی yهای آنها انجام می‌دهیم.

مثال1- در هر قسمت جواب را بنویسید.

الف) $f = \{(1,2), (4,-5), (7,\sqrt{2})\}$ ، $g = \{(1,4), (4,0), (7,2), (-4,1)\}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

1) $f+g=\{(1,2+4),(4,-5+0),(7,\sqrt{2}+2)\}$

2) $\frac{3f}{g}=\left\{\left(1,\frac{3\times 2}{4}\right),\left(4,\frac{3\times(-5)}{0}\right),\left(7,\frac{3\times\sqrt{2}}{2}\right)\right\}=\left\{\left(1,\frac{3}{2}\right),\left(7,\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right\}$

3) $(f\times g)(4)+g^2(1)=f(4)\times g(4)-g(1)\times g(1)=$

$$(-5)\times(0)-4\times 4=0-16=-16$$

4) $\sqrt{f}=\left\{\left(1,\sqrt{2}\right),\left(4,\sqrt{-5}\right),\left(7,\sqrt{\sqrt{2}}\right)\right\}=\{(1,\sqrt{2}),(7,\sqrt[4]{2})\}$

مثال 2- اگر $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$, $g(x)=\frac{x-7}{x+3}$ باشد، ضابطه و دامنه تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ را بیابید.

ضابطه تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x+2}{x-1}}{\frac{x-7}{x+3}}=\frac{(x+2)(x+3)}{(x-1)(x-7)}$

$\frac{D_f}{g}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}=\{\mathbb{R}-\{1\}\cap\mathbb{R}-\{-3\})-\{x\left|\frac{x-7}{x+3}=0\right.\}=\cdots$

مثال 3- اگر $f(x)=\sqrt{x+6}$, $g(x)=\frac{x+2}{x-5}$ باشند، مقدار $\frac{1}{5}(2f-g)(3)$ را به‌دست آورید.

$\frac{1}{5}\big(2f(3)-g(3)\big)=\frac{1}{5}\left(2\times\sqrt{3+6}-\frac{3+2}{3-5}\right)=\frac{1}{5}\left(2\times 3-\frac{5}{-2}\right)=\frac{1}{5}(6+2/5)=\cdots$

مثال 4- اگر $f(x)=2x-\sqrt{4x^2-1}$, $g(x)=2x+\sqrt{4x^2-1}$ باشند، آنگاه نمودار تابع $(f.g)(x)$ را رسم کنید.

$$(f.g)(x)=f(x)\times g(x)=\left(2x-\sqrt{4x^2-1}\right)\times\left(2x+\sqrt{4x^2-1}\right)$$

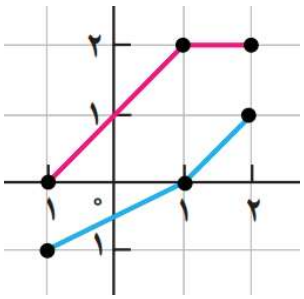
$$=4x^2-(4x^2-1)=1$$

$D_{f.g}=D_f\cap D_g=(+\infty,-\frac{1}{2}]\cup[-\frac{1}{2},+\infty)$

$D_f: 4x^2-1\geq 0\Longrightarrow x^2\geq\frac{1}{4}\Longrightarrow\cdots$ $\quad D_g: 4x^2-1\geq 0\Longrightarrow x^2\geq\frac{1}{4}\Longrightarrow$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال 5- اگر $f(x)=\sqrt{x}+1$, $h(x)=\sqrt{x}-1$ باشد، نمودار، ضابطه و دامنه $f\times g\,,f\pm g$, $\left(\frac{h}{2g}\right)(1)$ را به‌دست آورید.



مثال 6- نمودارهای دو تابع f (قرمز) ,g (سبز) داده شده است.

الف) ابتدا ضابطه توابع f,g را بنویسید.

ب) حاصل $(f\pm g)(x)$ را حساب کنید نمودار های آن را رسم کنید.

ب) حاصل $\left(\frac{3}{2}\right)$ $(f\div g)$ را حساب کنید نمودار های آن را رسم کنید.

مثال7- فرض کنیم $\begin{cases}h: N\to N\\ h(n)=\frac{n}{2}\end{cases}$, $f: A\to N$ به این صورت تعریف شود:

که در آن $A=\{1,2,3,4\}$ $f=\{(1,-2),(-2,-4),(3,6),(4,A)\}$

ضابطه توابع $(f+g)(x),(f^2-fg)(x)$ را به‌دست آورید.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا