اهمیت مطالعهٔ سطح و حجم را در جوامع امروزی از جهات بسیاری می‌توان مورد بررسی قرار داد، یکی از این موارد: بسته‌بندی محصولات غذایی است که اهمیت آن کمتر از تولید مواد غذایی نیست. به‌عنوان مثال در بسته‌بندی شیرینی و شکلات علاوه‌بر درنظرگرفتن کیفیت و ظاهر بسته‌بندی، در نظرگرفتن رابطهٔ بین سطح و حجم نیز تأثیر زیادی در فروش این نوع محصولات دارند. به‌طورکلی ما در دنیایی از اجسام زندگی می‌کنیم که نیاز داریم حجم آنها را به‌دست آوریم. در این بخش با انواع حجم‌ها و چگونگی به‌دست آوردن آنها آشنا می‌شویم.

## انواع حجم

حجم‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند:

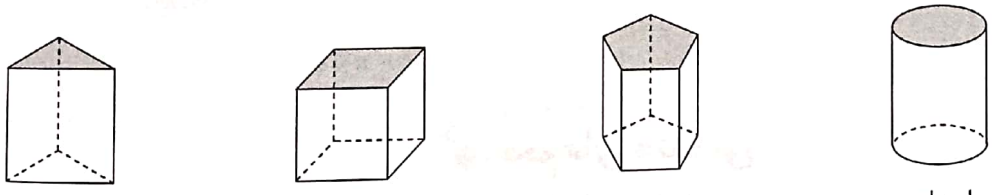
۱- حجم‌های هندسی ۲- حجم‌های غیرهندسی

**حجم‌های هندسی:** مربوط به شکل‌های مشخص و تعریف شده هستند، مانند: مکعب، منشور، استوانه و ...

حجم‌های هندسی به سه دسته تقسیم می‌شوند:

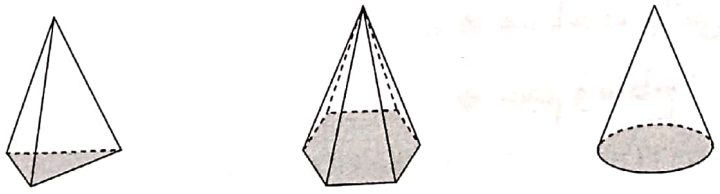
**۱- حجم‌های منشوری** **۲- حجم‌های هرمی** **۳- حجم‌های کروی**

۱- حجم‌های منشوری:



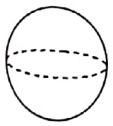
استوانه — منشور پنج‌پهلو — مکعب — منشور سه‌پهلو

۲- حجم‌های هرمی:



مخروط — هرم — هرم

۳- حجم‌های کروی:



کره

**حجم‌های غیرهندسی:** دارای شکل مشخص و تعریف شده‌ای نیستند، مانند: یک تکه سنگ، کوله‌پشتی و ...

## حجم‌های منشوری

در اصطلاح هندسه، منشور نام شکلی است که دو قاعدهٔ موازی دارد، که این قاعده‌ها دو چندضلعی مساوی هستند و به‌وسیلهٔ پاره‌خط‌هایی به‌هم متصل می‌شوند. حجم‌های منشوری، بین دو صفحهٔ موازی قرار می‌گیرند. منشور را با تعداد پهلوهای آن نام می‌برند.

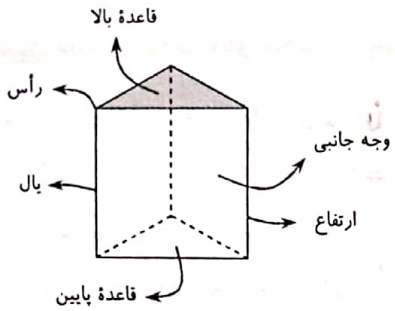
**قاعده منشور:** دو سطح بالا و پایین منشور را که دو چندضلعی کاملاً مساوی هستند قاعدهٔ منشور می‌گویند.

**وجه جانبی:** بدنهٔ یک منشور از تعدادی مستطیل یا متوازی‌الاضلاع تشکیل شده است، که هرکدام از آنها در واقع دیواره‌های کناری منشور هستند و به آنها وجه‌های جانبی منشور یا پهلوهای منشور می‌گویند. به بیان ساده‌تر به سطح‌های اطراف منشور، وجه جانبی می‌گویند.

**یال منشور:** هریک از پاره‌خط‌هایی که دو رأس نظیر قاعده را به هم وصل می‌کنند، یال نام دارند. به بیان ساده‌تر تمامی لبه‌های منشور یال‌های منشور هستند. به‌عبارت‌دیگر به محل برخورد سطح‌ها یال می‌گویند. تعداد یال‌های منشور سه‌برابر تعداد اضلاع قاعدهٔ منشور است.

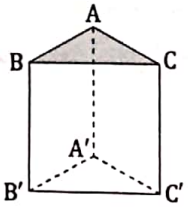


Scanned by CamScanner




راس منشور: به نقطهٔ برخورد یال‌ها و قاعده‌های یک حجم منشوری رأس می‌گویند، به بیان ساده‌تر به نقطهٔ برخورد هر سه سطح رأس می‌گویند.

ارتفاع منشور: فاصلهٔ بین دو قاعدهٔ منشور ارتفاع منشور می‌باشد.



منشور سه پهلو

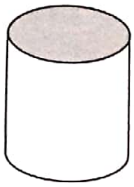
**مثال** در حجم مقابل نام منشور، قاعده‌ها، وجوه جانبی، رأس‌ها و یال‌ها را بنویسید.

قاعده‌ها: ۲ تا ← $ABC$ , $A'B'C'$

رأس‌ها: ۶ تا ← $A$ , $B$ , $C$ , $A'$ , $B'$ , $C'$

وجوه جانبی: ۳ تا ← $AA'B'B$ , $BB'C'C$ , $AA'C'C$

یال‌ها: ۹ تا ← $AB$ , $AC$ , $BC$ , $A'B'$ , $A'C'$ , $B'C'$ , $AA'$ , $BB'$ , $CC'$



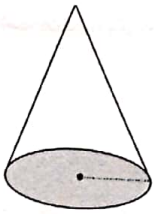
استوانه: اگر تعداد ضلع‌های یک چندضلعی خیلی زیاد باشد، این چندضلعی به شکل دایره نزدیک می‌شود، پس می‌توان گفت دایره یک چندضلعی با بی‌نهایت ضلع است. حال اگر روی این دایره (قاعده)، منشوری ساخته شود، آن منشور، استوانه نامیده می‌شود، به زبان ساده‌تر استوانه منشوری است با بی‌شمار یال و رأس که قاعدهٔ آن دایره‌ای شکل است. (استوانه یک حجم هندسی منشوری است)

نکته دایره یک چندضلعی منتظم با بی‌نهایت ضلع است.

### حجم‌های هرمی

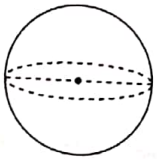


در اصطلاح هندسی، حجم هرمی، حجمی است که فقط از یک قاعده تشکیل شده است که به شکل یک چندضلعی و یا دایره است. وجوه جانبی‌اش مثلث‌هایی هستند که همه به یک رأس مشترک منتهی می‌شوند، به این رأس مشترک رأس هرم می‌گویند.



مخروط: یک نوع هرم است و قاعدهٔ آن چندضلعی است که بی‌شمار ضلع دارد، در حقیقت قاعدهٔ آن یک دایره است. می‌توان تصور کرد که مخروط از دوران دادن یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائم آن به‌وجود می‌آید.

### حجم‌های کروی



به شکل یک گوی - توپ می‌باشد. به بیان ساده‌تر در اصطلاح هندسی شکلی است که از دوران دادن یک نیم‌دایره یا یک دایره حول قطرش، به‌وجود می‌آید.

در مورد هرم، مخروط و کره در سال‌های بعد مطالب بیشتری مثل حجم و مساحت خواهید آموخت.

نکته اگر تعداد ضلع‌های قاعدهٔ منشور خیلی زیاد شود، منشور به استوانه نزدیک می‌شود. این نکته در تعریف استوانه نیز بیان شده است.

## محاسبهٔ حجم‌های منشوری

حجم: اگر به اطراف خود دقت کنیم، همهٔ اشیایی که می‌بینیم حجم دارند ولی همهٔ آنها شکل هندسی ندارند. حجم یک جسم، مقدار فضایی است که آن جسم اشغال می‌کند، برای به‌دست‌آوردن اندازهٔ حجم یک جسم هندسی راه‌های مختلفی وجود دارد. یکی از این راه‌ها تعیین تعداد مکعب‌های واحد در یک حجم می‌باشد.

مکعب واحد: مکعبی است که اندازهٔ طول، عرض و ارتفاع آن یک واحد باشد.



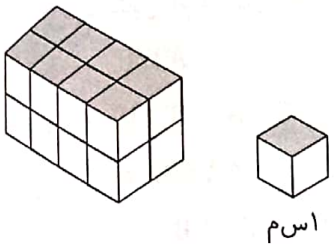
Scanned by CamScanner

## تعیین تعداد مکعب‌های واحد در یک حجم

همان‌طور که برای به‌دست آوردن مساحت اشکال هندسی، ابتدا آنها را به مربع واحد (مربعی که اندازهٔ هر ضلع آن یک باشد) تقسیم می‌کردیم و سپس تعداد آنها را می‌شمردیم و مساحت را به‌دست می‌آوردیم، برای به‌دست‌آوردن حجم اجسام هندسی نیز آنها را به مکعب‌های واحد (مکعبی که اندازهٔ طول، عرض و ارتفاع آن یک باشد) تقسیم می‌کنیم و سپس با شمارش آنها یا کسری از آنها حجم جسم موردنظر را محاسبه می‌کنیم.

**واحد حجم** : به مکعبی به ضلع ۱ سانتی‌متر یا ۱ متر، حجم یک سانتی‌مترمکعب یا یک مترمکعب می‌گویند.

**مثال ۱: حجم مکعب مستطیل زیر چند واحد مکعب است؟**



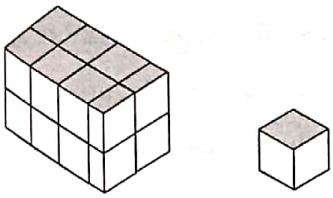
۱س‌م

**پاسخ:** مکعب مقابل از ۱۶ واحد مکعب تشکیل شده است.

حجم مکعب‌مستطیل = ۸×۲ = ۱۶ سانتی‌مترمکعب

---

**مثال ۲: حجم شکل مقابل چند سانتی‌متر مکعب است؟**



۱س‌م ۰/۵ س‌م

**پاسخ:**

حجم مکعب‌مستطیل = ۶×۲+۴×۰/۵ = ۱۲+۲ = ۱۴ سانتی‌مترمکعب

---

مساحت با S نشان داده می‌شود.

**مساحت مربع:** اگر ضلع مربع را با a و مساحت را با S نشان دهیم:



$S = a \times a = a^2$ و مساحت مربع = یک ضلع × خودش

**مساحت مستطیل:** اگر طول و عرض یک مستطیل را به ترتیب با a و b و مساحت را با S نشان دهیم، خواهیم داشت:



$S = a \times b = ab$ و مساحت مستطیل = عرض × طول

**مساحت مثلث:** اگر در یک مثلث قاعده را با a و ارتفاع وارد بر آن را با h نشان دهیم، خواهیم داشت:



$S = \frac{a \times h}{2} = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2} \times a \times h = \frac{1}{2}ah$ و مساحت مثلث = $\frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}$

**مساحت لوزی:** اگر در یک لوزی قطر بزرگ و کوچک را به ترتیب با a و b نشان دهیم، خواهیم داشت:



$S = \frac{a \times b}{2} = \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}ab$ و مساحت لوزی = $\frac{\text{قطر کوچک} \times \text{قطر بزرگ}}{2}$

**مساحت متوازی‌الاضلاع:** اگر در یک متوازی‌الاضلاع قاعده را با a و ارتفاع وارد بر آن را با h نشان دهیم، خواهیم داشت:



$S = a \times h = ah$ و مساحت متوازی‌الاضلاع = ارتفاع × قاعده

**مساحت ذوزنقه:** اگر در یک ذوزنقه قاعده‌ها را به ترتیب با a و b و ارتفاع را با h نشان دهیم، داریم:



$S = \frac{(a+b) \times h}{2} = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{1}{2}(a+b)h$



مساحت ذوزنقه = $\frac{\text{ارتفاع} \times (\text{مجموع دو قاعده})}{2}$



Scanned by CamScanner

مساحت دایره: اگر در یک دایره شعاع را با $r$ و عدد پی $(۳/۱۴)$ را با $\pi$ نشان دهیم، داریم:



مساحت دایره = شعاع × شعاع × $۳/۱۴$ و $S = r \times r \times \pi = \pi r^{۲}$

به یاد داشته باشید که با عبارت‌های $a^{۲}$ و $a^{۳}$ در فصل آخر کتاب به‌طور کامل آشنا خواهید شد.

برای به‌دست آوردن حجم منشور کافی است، که ابتدا مساحت قاعدهٔ آن را به‌دست آوریم و سپس در اندازهٔ ارتفاع منشور ضرب کنیم، بدین‌ترتیب حجم منشور به‌دست می‌آید. به‌عبارتی اگر حجم را با $V$ ، مساحت قاعده را با $S$ و ارتفاع را با $h$ نشان دهیم حجم منشور از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



حجم منشور = مساحت قاعده × ارتفاع $\Rightarrow V = S \times h$

حجم مکعبی که طول هر یال آن $a$ باشد از رابطهٔ $V = a \times a \times a$ $(V = a^{۳})$ به‌دست می آید.

**مثال** **حجم مکعبی که طول هر ضلع آن ۵ سانتی‌متر می‌باشد چقدر است؟**

$V = a \times a \times a \Rightarrow V = ۵ \times ۵ \times ۵ = ۱۲۵\,cm^{۳}$

---

اگر ابعاد مکعب‌مستطیلی به‌صورت $a$، $b$ و $c$ باشد، حجم آن برابر است با: $V = a \times b \times c$

**مثال** **حجم مکعب‌مستطیلی که طول آن $۱۰\,cm$ ،عرض آن $۸\,cm$ و ارتفاع آن $۵\,cm$ است را بیابید.**

$V = a \times b \times c \Rightarrow V = ۱۰ \times ۸ \times ۵ = ۴۰۰\,cm^{۳}$

---

برای محاسبهٔ حجم یک استوانه به شعاع قاعدهٔ $r$ و ارتفاع $h$ از رابطهٔ مقابل استفاده می‌کنیم: $V = \pi \times r \times r \times h$

**مثال** **حجم استوانه‌ای را بیابید که شعاع قاعدهٔ آن ۱۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۷ سانتی‌متر باشد.**

$V = \pi \times r \times r \times h \Rightarrow V = ۳/۱۴ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۷ = ۲۱۹۸\,cm^{۳}$

Scanned by CamScanner