

درس اول: عبارت های جبری و مفهوم اتحاد

تعریف یک جمله ای :

هر عبارت که به صورت ضرب یک عدد حقیقی در یک یا چند متغیر با توان های صحیح نامنفی باشد، یک جمله ای نامیده می شود.

عبارت های زیر همه یک جمله ای هستند:

$$\pi, -\frac{2}{3}x^3y^4, -\sqrt{3}a^2b^5, -9, -12xy^2$$

عبارت هایی که یک جمله ای نمی باشند:

۱- اگر متغیر دارای توان منفی باشد. مثال: $5x^{-2}$ ۲- اگر متغیر زیر را رادیکال باشد. (هر فرجه ای داشته باشد.) مثال: $2\sqrt{x^2}$, $\sqrt[3]{a^3}$ ۳- اگر متغیر در قدر مطلق باشد. مثال: $|x|$ ۴- اگر متغیر در مخرج کسر باشد. مثال: $\frac{1}{x}$ ۵- اگر متغیر در توان باشد. مثال: 3^{-x} ۶- اگر دو جمله ای باشد، یعنی بین جملات جمع یا تفریق باشد. مثال: $5x^2 - 4x$

تعریف یک جمله ای های متشابه: به دو یا چند یک جمله ای که عبارت حرفی یکسان (حرف ها و توان آنها مثل هم باشند.) یک جمله ای های متشابه گویند.

مثال:

$$-7a^2b \text{ و } 3ba^2 \text{ متشابه اند، ولی } 5x^2y^3 \text{ و } 5x^3y^2 \text{ متشابه نیستند.}$$

نکته: در یک عبارت جبری فقط جمله های متشابه را می توان جمع جبری (جمع یا تفریق) کرد.

تذکره: در جمع و تفریق جمله های متشابه فقط ضرایب عددی با هم جمع و تفریق می شوند و متغیرها هیچ تغییری نمی کنند.

مثال: عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

الف: $5x(x-2) + 2x(x+3) = 5x^2 - 10x + 4x^2 + 6x = 9x^2 - 4x$

ب: $-4xy^2 \times 3x^2 + (-x^2)(xy^2) = -12x^3y^2 - x^3y^2 = -13x^3y^2$

ج: $(-2a^3b)^2(ba^2) = (+4a^6b^2)(ba^2) = 4a^8b^3$

د: $(\frac{1}{3}ab^2)(-4ab)(-ab^2) = (-\frac{4}{3}a^2b^3)(-ab^2) = +\frac{4}{3}a^3b^5$

تعریف درجه یک چند جمله ای نسبت به یک یا چند متغیر:

درجه یک چند جمله ای نسبت به یک متغیر برابر است با بزرگ ترین توانی که آن متغیر در بین جمله ها دارد.

مثال: درجه چند جمله ای $12a^5 - 4a + 7$ نسبت به متغیر a برابر ۵ می باشد.

درجه یک چند جمله ای نسبت دو یا چند متغیر برابر است با جمع توان های آن متغیرها (توان های متغیرهای یک جمله ای ها را در یک عبارت چند جمله ای جمع می کنیم، حاصل هر کدام بیشتر شد آن عدد درجه آن چند جمله ای را نسبت به آن متغیرها نشان می دهد.)

تعریف چند جمله ای های استاندارد:

هرگاه در یک چند جمله ای جمله ها را نسبت به توان های یک متغیر نزولی (از بزرگ به کوچک) مرتب کنیم. به آن چند جمله ای، چند جمله ای استاندارد می گوییم.

تذکر: برای پیدا کردن درجه یک چند جمله ای نسبت به یک یا چند متغیر بهتر است ابتدا آن چند جمله ای را استاندارد کنیم سپس درجه آن را نسبت به متغیرهای خواسته شده بدست آوریم.

مثال ۱: درجه یک جمله ای $-7x^3y^6z - 7x^3y^6z$ نسبت به x برابر ۳ و نسبت به y برابر ۶ و نسبت به z برابر یک و نسبت به t برابر صفر است.

مثال ۲: چند جمله ای زیر را نسبت به x استاندارد کنید. سپس درجه آنرا نسبت به متغیرهای خواسته شده بنویسید.

$$9x^2y^3 - 3x^3y + 8xy^2 = -3x^3y + 9x^2y^3 + 8xy^2$$

درجه نسبت به x : ۳

درجه نسبت به y : ۳

درجه نسبت به x و y : $3 + 2 = 5$

مثال ۳: عبارت جبری زیر را ساده و سپس آن را نسبت به توان های نزولی x مرتب و همچنین درجه آن را نسبت به متغیرهای خواسته شده بنویسید.

$$-5a^2 - 3ax + x^2 - [4a^2 + 5ax - (3a^2 - 8ax)]$$

$$= -5a^2 - 3ax + x^2 - [4a^2 - 5ax - 3a^2 + 8ax]$$

$$= -5a^2 - 3ax + x^2 - 4a^2 + 5ax + 3a^2 - 8ax$$

$$= -6a^2 - 3ax + x^2 - 3ax$$

$$= x^2 - 3ax - 6a^2 - 3a$$

درجه نسبت به a : 2 ، درجه نسبت به x : 2 ، درجه نسبت به x و a : $2 = 1 + 1$

تعریف اتحاد: یک تساوی جبری که به ازای همه مقادیر درست باشد، را اتحاد می نامیم.

مثال: عبارت $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ اتحاد است، زیرا به ازای تمام مقدارهایی که به جای متغیرهایش قرار دهیم، تساوی برقرار است.

x	$(x + 1)^2$	$x^2 + 2x + 1$
-2	$(-2 + 1)^2 = (-1)^2 = 1$	$(-2)^2 + 2(-2) + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$
0	$(0 + 1)^2 = (1)^2 = 1$	$(0)^2 + 2(0) + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$
5	$(5 + 1)^2 = (6)^2 = 36$	$(5)^2 + 2(5) + 1 = 25 + 10 + 1 = 36$
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2} + 1\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{9}{4} + 3 + 1 = 4\frac{9}{4} = \frac{25}{4}$

سوال: آیا $x + 1 = 3$ اتحاد است؟ چرا؟

خیر، زیرا این عبارت فقط به ازای 2 درست است، پس اتحاد نیست. این عبارت یک معادله می باشد.

سوال: تفاوت اتحاد و معادله چیست؟

اتحاد به ازای تمام مقادیری که به جای متغیرهایش قرار می دهیم، درست است. اما معادله به ازای بعضی مقادیر مشخص درست می باشد.

نکته: بی شمار اتحاد داریم. که بعضی از آنها خیلی پرکاربرد هستند.

اتحاد مربع دو جمله ای:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \leftarrow \text{الف) اتحاد مربع مجموع دو جمله}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \leftarrow \text{ب) اتحاد مربع تفاضل (اختلاف) دو جمله}$$

اتحاد مربع دو جمله ای بصورت کلامی:

الف: اتحاد مربع مجموع دو جمله

$$(\text{جمله دوم} + \text{جمله اول})^2 = (\text{جمله اول})^2 + 2(\text{جمله اول})(\text{جمله دوم}) + (\text{جمله دوم})^2$$

ب: اتحاد مربع مجموع دو جمله

$$(\text{جمله دوم} - \text{جمله اول})^2 = (\text{جمله اول})^2 - 2(\text{جمله اول})(\text{جمله دوم}) + (\text{جمله دوم})^2$$

مثال: طرف دوم هر عبارت را به کمک اتحاد بدست آورید.

الف: $(2a + 3)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3) + (3)^2 = 4a^2 + 12a + 9$

ب: $(4x + 3y)^2 = (4x)^2 + 2(4x)(3y) + (3y)^2 = 16x^2 + 24xy + 9y^2$

ج: $(a - 2b)^2 = (a)^2 - 2(a)(2b) + (2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$

د: $(2x - 5y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(5y) + (5y)^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$

هـ: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x)^2 + 2(x)\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

تعریف تجزیه یک عبارت جبری: تبدیل یک عبارت جبری به ضرب دو یا چند عبارت جبری دیگر با درجه کمتر را تجزیه گوئیم.

روشهای تجزیه:

۱- فاکتورگیری ۲- استفاده از اتحادها ۳- ترکیبی (فاکتورگیری همراه با اتحاد)

۱- فاکتورگیری: برای تجزیه یک عبارت با استفاده از فاکتورگیری کافیت از «ب.م.م» عددها و عوامل مشترک بین متغرها (بین چند متغیر مثل هم، متغیری مشترک است که توانش کمتر باشد.) فاکتورگیری کنیم.

مثال: عبارت های زیر را تجزیه کنید.

الف: $ab + ac = a(b + c)$

ب: $15x^2y - 20xy^2 = 5xy(3x - 4y)$

ج: $7x^2y^3 + 21x^3y - 49xy = 7xy(xy^2 + 3x^2 - 7)$

۲- تجزیه به کمک اتحاد: برای تجزیه یک عبارت سه جمله ای به کمک اتحاد مربع دو جمله ای آن عبارت سه جمله ای باید دارای دو ویژگی باشد:

۱- جمله های اول و سوم جذر داشته باشند.

۲- جمله وسط از ضرب عدد ۲ در جذر دو جمله دیگر بدست آمده باشد.

در این صورت از جمله های اول و سوم جذر گرفته و چنانچه جمله وسط جمع باشد بین آنها علامت جمع و اگر تفریق بوده بین آنها علامت منها قرار داده و به توان ۲ می نویسیم. و در پایان آنرا به صورت ضرب دو عبارت دو جمله ای می نویسیم.

مثال : عبارت های زیر را به کمک اتحاد مربع دو جمله ای تجزیه کنید.

الف: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

ب: $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2 = (2x + 3y)(2x + 3y)$

ج: $9x^2 - 12x^2y + 4y^2 = (3x^2 - 2y)^2 = (3x^2 - 2y)(3x^2 - 2y)$

۳- تجزیه ترکیبی (فاکتورگیری و اتحاد) : در بعضی از عبارت ها ابتدا باید با استفاده از فاکتورگیری از عوامل مشترک فاکتورگیری کنیم و سپس با استفاده از اتحاد عبارت بدست آمده را تجزیه کنیم.

مثال: عبارت های زیر را به کمک اتحاد مربع دو جمله ای تجزیه کنید.

الف: $a^3 - 2a^2 + a = a(a^2 - 2a + 1) = a(a - 1)^2 = a(a - 1)(a - 1)$

ب: $2x^3 + 8x^2 + 8x = 2x(x^2 + 4x + 4) = 2x(x + 2)^2 = 2x(x + 2)(x + 2)$

ج: $25a^2 + 30a^3 + 9a^2 =$

$a^2(25a^2 + 30a + 9) = a^2(5a + 3)^2 = a^2(5a + 3)(5a + 3)$

درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها

اتحاد مربع سه جمله ای:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

اتحاد مربع سه جمله ای به صورت کلامی:

$$(\text{سومی} + \text{دومی} + \text{اولی})^2 = (\text{سومی})^2 + (\text{دومی})^2 + (\text{اولی})^2 + 2(\text{سومی})(\text{دومی}) + 2(\text{سومی})(\text{اولی}) + 2(\text{دومی})(\text{اولی})$$

مثال: حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد مربع سه جمله ای بدست آورید.

$$\begin{aligned}(x - y - z)^2 &= (x)^2 + (-y)^2 + (-z)^2 + 2(x)(-y) + 2(x)(-z) + 2(-y)(-z) = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yx\end{aligned}$$

$$\text{ب: } (2a - 3b - c)^2 =$$

$$\begin{aligned}&= (2a)^2 + (-3b)^2 + (-c)^2 + 2(2a)(-3b) + 2(2a)(-c) + 2(-3b)(-c) = \\ &= 4a^2 + 9b^2 + c^2 - 12ab - 4ac + 6bc\end{aligned}$$

اتحاد مزدوج:

برای هر دو a و b داریم:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

یعنی: حاصل ضرب مجموع دو جمله در تفاضل همان دو جمله برابر است با مربع جمله اول منهای مربع جمله دوم

اتحاد مزدوج به صورت کلامی:

$$(\text{جمله اول} + \text{جمله دوم})(\text{جمله اول} - \text{جمله دوم}) = (\text{جمله اول})^2 - (\text{جمله دوم})^2$$

مثال: حاصل هر عبارت را به کمک اتحاد بدست آورید.

$$\text{الف: } (3x - 4)(3x + 4) = (3x)^2 - (4)^2 = 9x^2 - 16$$

$$\text{ب: } \left(\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y\right) = \left(\frac{1}{4}x\right)^2 - \left(\frac{2}{3}y\right)^2 = \frac{1}{16}x^2 - \frac{4}{9}y^2$$

$$\text{ج: } (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = (x)^2 - (\sqrt{2})^2 = x^2 - 2$$

$$\text{د: } (2\sqrt{3} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}) = (2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{5})^2 = 4 \times 3 - 9 \times 5$$

$$= 12 - 45 = -33$$

$$\begin{aligned} \text{هـ: } (x + y + z)(x - y - z) &= [x + (y + z)][x - (y + z)] = x^2 - (y + z)^2 \\ &= x^2 - (y^2 + 2yz + z^2) = x^2 - y^2 - 2yz + z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ز: } (a - 2b + 5)(a + 2b - 5) &= [a - (2b - 5)][a + (2b - 5)] \\ &= a^2 - (2b - 5)^2 = a^2 - (4b^2 - 20b + 25) = a^2 - 4b^2 + 20b - 25 \end{aligned}$$

تجزیه یک عبارت به کمک اتحاد مزدوج:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad \text{در حالت کلی:}$$

تذکر! عبارتی را می توان به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کرد که دارای سه ویژگی باشد:

- ۱- دو جمله ای باشد. ۲- هر دو جمله جذر داشته باشند. ۳- بین دو جمله علامت منها باشد.
- در این صورت برای تجزیه از دو جمله داده شده جذر گرفته و یک بار آنها جمع کرده و بار دیگر تفریق کرده و آنها را به صورت ضرب دو عبارت می نویسیم.

مثال: به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنید.

$$\text{الف: } a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$$

جذر a^2 برابر a و جذر ۴ برابر ۲ می شود پس با اتحاد مزدوج تجزیه کردیم.

$$\text{ب: } 9ax^2 - a = a(9x^2 - 1) = a(3x - 1)(3x + 1)$$

$$\text{ج: } (a + b)^2 - 4 = [(a + b) + 2][(a + b) - 2] = (a + b + 2)(a + b - 2)$$

نکته: استفاده از اتحادها، می تواند بعضی از محاسبات به ظاهر مشکل را به راحتی امکان پذیر کند.

مثال: به کمک اتحادها حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$\text{الف: } 49 \times 51 = (50 - 1)(50 + 1) = 50^2 - 1^2 = 2500 - 1 = 2499$$

$$\text{ب: } 602 \times 598 = (600 + 2)(600 - 2) = 600^2 - 2^2 = 360000 - 4 = 359996$$

$$\text{ج: } 48^2 = (50 - 2)^2 = 50^2 - 2(50)(2) + 2^2 = 2500 - 200 + 4 = 2304$$

$$\text{د: } 101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2(100)(1) + 1^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$$

اتحاد جمله مشترک :

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم :

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)(x) + ab$$

که به صورت کلامی برابر است با :

$$\begin{aligned} & \text{(جمله غیر مشترک دوم + جمله مشترک)} \text{ (جمله غیر مشترک اول + جمله مشترک)} = \\ & \text{حاصل ضرب دو جمله غیر مشترک} + \text{(جمله مشترک)} \text{ (مجموع دو جمله غیر مشترک)} + \text{(جمله مشترک)}^2 \end{aligned}$$

مثال: حاصل هر عبارت را به کمک اتحاد بدست آورید.

الف: $(x + 3)(x + 2) = x^2 + (3 + 2)(x) + (3 \times 2) = x^2 + 5x + 6$

ب: $(x - 7)(x + 3) = x^2 + (-7 + 3)(x) + (-7) \times (3) = x^2 - 4x - 21$

ج: $(4a - 3)(4a - 8) = (4a)^2 + (-3 + (-8))(4a) + (-3)(-8) = 16a^2 - 44a + 24$

د: $(2a - 5)(2a + 7) = (2a)^2 + (-5 + 7)(2a) + (-5)(7) = 4a^2 - 4a - 35$

تذکره! حاصل اتحاد جمله مشترک مانند اتحاد مربع دو جمله ای دارای ۳ جمله است ، با این تفاوت که در اتحاد جمله مشترک جمله سوم جذر ندارد.

تجزیه اتحاد جمله مشترک:

$$x^2 + (a + b)(x) + ab = (x + a)(x + b)$$

در سه جمله ای $x^2 + (a + b)(x) + ab$

x^2 مربع جمله مشترک و $(a + b)$ مجموع دو جمله غیر مشترک و همچنین ab حاصل ضرب دو جمله غیر مشترک می باشد.

بنابراین برای تجزیه اتحاد جمله مشترک دو پرانتز باز کرده و در هر دو پرانتز ابتدا جذر جمله مشترک را نوشته ، سپس با توجه به علامت دو جمله غیر مشترک علامت مناسب بعد از جمله مشترک قرار داده و دو عدد غیر مشترک را پیدا می کنیم.

مثال: به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه کنید.

الف: $x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7)$

$$\text{ب: } x^2 + 9x + 20 = (x + 5)(x + 4)$$

$$\text{ج: } x^2 + 6x - 7 = (x + 7)(x - 1)$$

$$\text{د: } x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$$

تمرین:

حاصل هر عبارت را به کمک اتحاد بدست آورید.

$$(x + y)^2 =$$

$$x - y^2 =$$

$$(2a + b)^2 =$$

$$(3m - n)^2 =$$

$$(-4x - y)^2 =$$

$$(-a + 5b)^2 =$$

$$\left(a + \frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y\right)^2 =$$

$$(x + y)(x - y) =$$

$$(2x + y)(2x - y) =$$

$$(\sqrt{5}x + 8)(\sqrt{5}x - 8) =$$

$$(x + a)(x + b) =$$

$$(b + 2)(5 + b) =$$

$$(1 + k)(k - 3) =$$

$$(6 + x)(6 + y) =$$

$$(A + B)^2 =$$

$$101^2 =$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) =$$

$$(\dots + \dots)^2 = 49x^2 + y^2 + \dots$$

$$(\dots - 3)^2 = 4\Box^2 - \dots + \dots$$

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 =$$

$$(x - 2y + 5)(x + 2y - 5) =$$

$$(z - x + y)^2 =$$

$$97^2 =$$

$$(-z - x - y)^2 =$$

$$(2m^2 + 3n^3)^2 =$$

$$(2a - 3x + y)^2 =$$

$$(2\sqrt{y} + x)^2 =$$

$$(a - y)(y + a) =$$

$$(4x + 7y)(4x - 7y) =$$

$$(x + 8)(x + 3) =$$

$$(3x + 2)(3x + 4) =$$

$$(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5}) =$$

$$(f + 1)(f - 8) =$$

$$(5x^2 - 1)(5x^2 + 1) =$$

$$950^2 - 850^2 =$$

$$\left(2x - \frac{y}{3}\right)\left(2x + \frac{y}{3}\right) =$$

$$(9x - 8)(9x + 2) =$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 =$$

$$(A + B)(A - B) =$$

$$(r - 3)(r - 1) =$$

$$(A - a)(A - b) =$$

$$(s - 3)^2 =$$

$$(3 - 2xy)^2 =$$

$$(2b - \dots)^2 = \dots - 2 \cdot b + \dots$$

$$(w + 3)(w - 1) =$$

$$(10w + 3)(10w - 1) =$$

$$(x^3y^2 + x)^2 =$$

$$(\dots - \dots)^2 = 16x^2 + 25y^2 - \dots$$

$$(1 + \sqrt{3})^2 =$$

$$(y + 3y)(3y - 8) =$$

$$(4a + 3b)^2 =$$

$$(a + (-b))^2 =$$

$$2a(2x + 3y)^2 =$$

$$(4x + 2y - m)^2 =$$

$$(n^2 - 5)(n^2 - 5) =$$

عبارت های زیر را تجزیه کنید.

$$a^2 + 2ab + b^2 =$$

$$s^2 - 2s + 1 =$$

$$x^2 + (a + b)x + ab =$$

$$s^2 - 7s + 12 =$$

$$x^2 - y^2 =$$

$$x^2 - 49 =$$

$$a^2 - 2ab + b^2 =$$

$$a^4 - b^4 =$$

$$x^2 + 5x + 4 =$$

$$1 - (3a + x)^2 =$$

$$8xy + 4x - 6x^2 =$$

$$s^2 - 10s + 25 =$$

$$xy + xz =$$

$$x^2 + 17x + 72 =$$

$$x^2 + 7x + 10 =$$

$$2x^2 + 4x + 2 =$$

$$1 - m^2 =$$

$$4x^2 - 4y^2 =$$

$$-m^2 + 1 =$$

$$2x^2 + 4x + 2 =$$

$$x^2 - 2x - 8 =$$

$$n^6 - 10n^2 + 25 =$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} =$$

$$z^2 - 4z + 4 =$$

$$(x^2 - y^2) + 4x + 4 =$$

$$8x^2 + 24xy + 18y^2 =$$

$$6x^2 + 7x + 2 =$$

$$-x^2 + y^2 =$$

$$2x^2 + 13x - 15 =$$

$$a(x + 1) + b(x + 1)^2 =$$

$$6x^2 - 5x - 6 =$$

$$xy + 3z + xz + 3y =$$

$$x^3 - x^2 - 20x =$$

$$2y - 3x + 4y^2 - 9x^2 =$$

$$4 - 9x^2 =$$

$$a^6 - 81 =$$

$$ax - 1 + a - x =$$

$$25x^6 + 30x^3 + 9x^2 =$$

$$3x^2 + 6x - 24 =$$

$$7 - x^2 + y^2 - 7 =$$

$$a^3 - a^2 - 20a =$$

$$3z^2 - 12z + 12 =$$

$$h^2 + 14h + 49 =$$

$$h^2 + 14h + 40 =$$

$$h^2 - 49 =$$

$$-24 + 10x + x^2 =$$

$$-6 - y + y^2 =$$

$$y^2 - y - 6 =$$

@riazicafe